

**АКАДЕМИЯ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**  
**ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ ФИЗИКИ**  
**АСТРОНОМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

На правах рукописи  
УДК 530.12:531.51

МАМАДЖАНОВ АХРОРЖОН ИБРАГИМОВИЧ

**ВАКУУМНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И**  
**АСТРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ В ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ И**  
**ВРАЩАЮЩИХСЯ НАМАГНИЧЕННЫХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ**  
**КОМПАКТНЫХ ОБЪЕКТАХ**

Специальность: 01.03.02 - Астрофизика и радиоастрономия

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени кандидата  
физико-математических наук

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Б.Ж. Ахмедов

Ташкент – 2010

# Оглавление

Введение	5
<b>ГЛАВА 1. Внешние электромагнитные поля осциллирующей релятивистской звезды.</b>	<b>17</b>
1.1 Введение . . . . .	17
1.2 Уравнения Максвелла в пространстве-времени Шварцшильда. . . . .	21
1.3 Электромагнитные поля внутри звезды . . . . .	26
1.4 Электромагнитные поля в ближней зоне . . . . .	28
1.4.1 Магнитные поля . . . . .	31
1.4.2 Электрические поля . . . . .	34
1.5 Электромагнитные поля в волновой зоне . . . . .	37
1.6 Выводы . . . . .	42
<b>ГЛАВА 2. Электромагнитные поля во внешнем пространстве осциллирующей релятивистской звезды. Сфероидальные и тороидальные поля скоростей</b>	<b>45</b>
2.1 Введение . . . . .	45
2.2 Электромагнитные поля в ближней зоне . . . . .	46
2.2.1 Магнитные поля . . . . .	47
2.2.2 Электрические поля . . . . .	49
2.2.3 Поле скоростей сфероидальных осцилляций . . . . .	50
2.2.4 Поле скоростей радиальных осцилляций . . . . .	51
2.2.5 Поле скоростей тороидальных осцилляций . . . . .	54
2.3 Электромагнитные поля в волновой зоне . . . . .	55
2.3.1 Поле скоростей сфероидальных осцилляций . . . . .	55

2.3.2	Поле скоростей радиальных осцилляций . . . . .	56
2.3.3	Поле скоростей тороидальных осцилляций . . . . .	57
2.4	Электромагнитное затухание осцилляций . . . . .	57
2.4.1	Затухание за счет электромагнитного излучения от тороидальных осцилляций . . . . .	58
2.4.2	Затухание за счет электромагнитного излучения от сферических осцилляций . . . . .	61
2.4.3	Затухание за счет джоулевого нагрева . . . . .	63
2.5	Выводы . . . . .	67

**ГЛАВА 3. Эффекты квантовой интерференции в пространстве-времени медленно вращающегося намагниченного компактного объекта в модели мира на бранах** **71**

3.1	Введение . . . . .	71
3.2	Фазовый сдвиг . . . . .	73
3.3	Интерференция в интерферометре типа Маха-Зендера . . . . .	80
3.4	Эффект Саньяка в пространстве-времени гравитирующего объекта в модели мира на бранах . . . . .	83
3.5	Выводы . . . . .	85

**ГЛАВА 4. Энергетические процессы в окрестности черных дыр в некоторых гравитационных моделях** **88**

4.1	Тепловое излучение Хокинга в метрике медленно вращающегося компактного объекта на бранах . . . . .	91
4.2	Механизмы Блендфорда-Знаека, Пенроуза и Мейсснера в плазменной магнитосфере компактных объектов в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ . . . . .	95
4.2.1	Уравнения электродинамики во внешнем гравитационном поле компактных объектов . . . . .	95
4.2.2	Эффект Мейсснера в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ . . . . .	97

4.2.3	Механизм Блендфорда-Знаека в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ . . . . .	99
4.2.4	Процесс Пенроуза в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ . . . . .	103
4.3	Выводы . . . . .	104
	<b>Основные результаты и заключение</b>	<b>106</b>
	<b>Литература</b> . . . . .	<b>108</b>

# Введение

## Актуальность.

В последнее время в релятивистской астрофизике усилился интерес к физике сильно намагниченных нейтронных звезд (НЗ), таких как аномальные рентгеновские пульсары (АРП) и источники мягких повторяющихся гамма-всплесков (ИМПГ, soft gamma-ray repeaters). Важными наблюдательными фактами для интерпретации природы источников является наличие периодов и переменность рентгеновского потока. Периоды АРП и ИМПГ лежат в диапазоне 5-12 секунд. ИМПГ представляют собой объекты, демонстрирующие случайные (непредсказуемые) периоды активности, носящие характер вспышек излучения в мягком ( $< 100$  кэВ) гамма-диапазоне. Периоды активности делятся от дней до месяцев. Если наличие электромагнитных полей вблизи компактных релятивистских звезд является их существенным признаком, то естественно предположить, что такие звезды, как и обычные, подвержены различным видам колебаний, которые могут быть обнаружены через излучение гравитационных и электромагнитных волн. Это излучение представляет уникальную возможность исследования физики и внутреннего строения звезд, также как и свойств вещества при ядерных плотностях. Более того, недавние наблюдения [14] квазипериодических осцилляций в спектре гигантских вспышек периодических ИМПГ возбудили интерес к исследованию процессов, происходящих в окрестности осциллирующих НЗ. Принимая во внимание то, что механизм излучения НЗ до сих пор не является полностью изученным, исследование влияний осцилляций звезды на ее излучение представляет большой интерес для современной релятивистской астрофизики.

Изучение электродинамики релятивистских звезд, в частности, мод их собственных колебаний, может дать важную информацию, которая относится не только к астрофизике, но также к физике и внутреннему строению этих объектов. Электромагнитное затухание осцилляций ньютоновской НЗ было впервые исследовано в [15]. в работе [16] дано полное точное решение для вакуумных электромагнитных полей в окрестности осциллирующей НЗ с дипольным поверхностным магнитным полем. Предполагая, что электромагнитные поля, индуцируемые осцилляциями звезды, являются достаточно сильными для того, чтобы вырвать заряженные частицы с поверхности звезды и образовать магнитосферу, в работе [17] была разработана модель магнитосферы осциллирующей НЗ. Однако, мощные электромагнитные поля не являются единственной важной особенностью компактных объектов. Те же астрономические наблюдения, которые определяют существование таких полей, фактически также делают очевидным то, что они связаны с очень плотными объектами, обладающими сильными гравитационными полями. В результате точное описание электродинамики компактных объектов может быть сделано только в рамках формализма, в котором правильно принимаются во внимание общерелятивистские поправки. Не так давно были изучены внутренние и внешние вакуумные электромагнитные поля, создаваемые за счет вращения компактной звезды, обладающей дипольным магнитным полем, и разработан систематический подход к получению аналитических выражений для электромагнитных полей вблизи поверхности звезды (так называемая "ближняя зона") [18].

Свойства черных дыр (ЧД) во внешнем магнитном поле были подробно изучены разными авторами с целью изучения вопроса об извлечении энергии ЧД, в частности через эффект Блендфорда-Знаека или излучение Хокинга.

В настоящее время с большой точностью проводятся прецизионные эксперименты по выявлению влияния гравитационного поля Земли на смещение фазы частиц в нейтронном интерферометре [19, 20], а также на квантование энергетических уровней ультрахолодных нейтронов [21]. Теоретическое исследование подобных эффектов с использованием различных метрик

пространства-времени приведет к значительному продвижению в построении теории квантовой гравитации и послужит проверке различных гравитационных моделей.

Идея многомерного пространства-времени впервые появилась в работе Г. Нордстрёма 1914 года [22] ОТО в форме скалярной теории гравитации как составной части максвелловской электродинамики в пятимерном пространстве-времени. Основное отличие сегодняшнего подхода к многомерности Вселенной заключается в том, что, несмотря на четырехмерную природу непосредственно наблюдаемого физического мира, дополнительные измерения пространства-времени могут быть макроскопическими и даже некомпактными. При этом четырехмерность нашего мира достигается посредством локализации материи в многомерном пространстве-времени на его четырехмерных подмногообразиях, называемых бранами. Согласно модели мира "на бранах" [23], только гравитационное взаимодействие способно свободно распространяться в 5-мерном пространстве, в то время как другие виды взаимодействия "заперты" в 4-мерной Вселенной. С этой точки зрения особенно важным представляется изучение влияния пятого измерения на наш мир в рамках ОТО. Важными инструментами для исследования данного влияния выступают эффекты ОТО на макроскопические квантовые явления. Также исследование структуры электромагнитных полей звезд в рамках модели Вселенной на бранах позволит найти корректировки для соответствующих наблюдаемых величин и открыть возможность тестирования данной модели с помощью астрономических и астрофизических наблюдений.

### Степень изученности проблемы.

Исследование электромагнитных полей осциллирующей намагниченной звезды - довольно сложная проблема. Однако в последние годы рядом авторов была развита электродинамика осциллирующих звезд в плоском пространстве, поскольку осцилляции НЗ могут дать мощный инструмент для исследования внутренней структуры звезд. Ранее смоделированы электромагнитные поля, создаваемые в волновой зоне НЗ, подверженной тороидальным сферическим колебаниям, для вычисления затухания этих колебаний за счет

электромагнитного излучения. Также были выведены точные аналитические решения для электромагнитных полей в ближней зоне и волновой зоне осциллирующей НЗ с дипольным поверхностным магнитным полем. В обоих случаях НЗ рассматривалась в вакууме и для простоты звездные магнитные поля считались невозмущенными, что позволяло не учитывать возмущения магнитного поля при оценке потерь энергии. Недавно была широко исследована электродинамика плазменной магнитосферы НЗ, возмущенной тороидальными колебаниями, опустив при этом предположение о том, что звезда окружена вакуумом. Перечисленные работы основаны на ньютоновском описании гравитации, но такое описание является достаточно слабым приближением вблизи поверхности релятивистской звезды. С другой стороны, в результате интенсивных исследований, проводимых в нашей группе, было показано, что общерелятивистские эффекты имеют исключительно важное влияние на электромагнитные поля вращающегося НЗ. Однако вакуумная электродинамика осциллирующих НЗ в ОТО пока еще была не изучена. Несмотря на большое количество работ, посвященных проблемам релятивистской астрофизики, еще остаются неизученными такие вопросы как существование гравитомагнитного монополя. Модель Вселенной на бранах является относительно новой теорией и также требует подробного исследования и обоснования.

**Цель работы.** Целью данной диссертационной работы является разработка общего формализма и поиск точных аналитических решений для электромагнитных полей в ближней и дальней зоне от звезды, а также исследование влияния эффектов общей теории относительности (ОТО) на дипольные электромагнитные потери энергии в искривленном пространстве-времени сферических релятивистских звезд, испытывающих осцилляции. Исследование эффектов квантовой интерференции, а именно а) смещения фазы частиц в нейтронном интерферометре; б) смещения фазы частиц в интерферометре типа Маха-Зендера; в) эффекта Саньяка в гравитационном поле медленно вращающегося объекта с ненулевым бран параметром. Получение верхнего предела на значение бран-параметра из лабораторных экспериментов по

интерферометрии частиц, проводимых на Земле. Исследование механизмов извлечения энергии ЧД в модели на бранах и получение выражений, описывающих зависимость теплового излучения Хокинга ЧД от бран параметра.

### Постановка задачи.

Для достижения вышеуказанных целей нам надо было решить нижеследующие задачи:

– Сформулировать уравнения Максвелла в пространстве-времени намагниченной осциллирующей НЗ и граничные условия на ее поверхности. Найти решения для внутреннего электромагнитного поля звезды.

– Получить решения для внешнего магнитного и электрического полей осциллирующей НЗ а) в ближней зоне, б) волновой зоне, для произвольной конфигурации невозмущенного магнитного поля звезды. Применить полученный формализм к случаю дипольной конфигурации магнитного поля звезды.

– Найти общерелятивистское выражение для дипольных электромагнитных потерь энергии и для внешнего магнитного и электрического полей намагниченной компактной звезды в случае различных типов осцилляций осциллирующей НЗ и сравнить его с ньютоновским выражением.

– Рассмотреть в рамках ОТО различные механизмы затухания осцилляций звезды; получить релятивистские выражения для потерь энергии звезды за счет электромагнитного излучения для различных мод осцилляций; получить релятивистское выражение для омических потерь энергии звезды.

– Рассмотреть эффекты квантовой интерференции в пространстве-времени медленно вращающегося гравитирующего объекта в модели мира на бранах. На основе результатов земных экспериментов по интерферометрии частиц, установить верхний предел на значение бран-параметра.

– Исследовать влияние бран параметра на процесс теплового излучения Хокинга ЧД в рамках модели мира на бранах.

– Изучить процессы Блендфорда-Знаека, Мейсснера и Пенроуза в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ в окрестности ЧД. Проверить влияние эффекта Мейсснера на эффективность процесса Блендфорда-Знаека по извлечению энергии ЧД, обладающей ненулевым гравитомагнитным зарядом.

– Проанализировать итоговые результаты исследований, сопоставить их с аналогичными результатами зарубежных авторов.

**Научная новизна** определяется тем, что в диссертации впервые найдены аналитические решения уравнений Максвелла внутри и вне намагниченной осциллирующей релятивистской звезды для произвольной конфигурации фонового магнитного поля звезды и произвольного выражения для скорости осцилляций. В работе впервые показано, что известное ньютоновское выражение для потерь электромагнитной энергии вращающегося магнитного диполя в несколько раз недооценивает потери энергии намагниченной вращающейся компактной звезды, так как оно не учитывает релятивистских эффектов усиления магнитного поля и красного смещения частоты излучения в искривленном пространстве-времени звезды. Впервые получены релятивистские выражения для внешних электромагнитных полей намагниченной компактной звезды испытывающей различные типы осцилляций. Впервые показано, что учет релятивистских поправок в выражениях для затухания осцилляций звезды за счет генерируемого ими электромагнитного излучения приводит к значениям, в несколько раз превышающим ньютоновские, для всех типов осцилляций звезды. Впервые приведена оценка релятивистских поправок к затуханиям осцилляций за счет джоулева нагревания внутреннего вещества звезды в предположении его конечной проводимости. Найдено влияние бран-параметра на разность фаз интерферирующих пучков в эксперименте Саньяка, на сдвиг фазы частицы в нейтронном интерферометре и на смещение квантовых энергетических уровней ультрахолодных нейтронов. Впервые исследовано влияние бран параметра на тепловое излучение Хокинга ЧД, а также влияние НУТ параметра на процессы Блендфорда-Знаека, Мейсснера и Пенроуза в окрестности ЧД.

**Научная значимость и практическая ценность** состоит в том, что полученные результаты могут играть важную роль при исследовании звездных осцилляций различных типов. Полученное выражение для потерь энергии вращающейся и осциллирующей намагниченной НЗ дает возможность проверки эффектов ОТО из наблюдательных характеристик звезды. Одним

из важных результатов является получение верхнего предела значения бран-параметра на основе данных об экспериментах по интерферометрии частиц, проводимых в земных условиях, что может служить основой для дальнейшей проверки модели мира на бранах. Исследование механизмов извлечения энергии ЧД в различных гравитационных моделях может привести к более глубокому пониманию физики ЧД и возможности дальнейшей проверки используемых гравитационных моделей.

### **На защиту выносятся следующие основные результаты**

1. Точные аналитические решения для электрического и магнитного полей во внутренней области, в ближней зоне, а также в волновой зоне намагниченной осциллирующей НЗ для конфигурации невозмущенного магнитного поля звезды и скорости ее осцилляций. Общерелятивистское выражение для электромагнитных потерь энергии осциллирующей НЗ с дипольной конфигурацией исходного магнитного поля.
2. Конкретные аналитические решения для внешнего электромагнитного поля намагниченной компактной звезды, испытывающей а) сфероидальные, б) радиальные, в) тороидальные осцилляции. Релятивистские выражения для потерь энергии осцилляций за счет излучения электромагнитных волн для всех трех указанных мод осцилляций и дипольного магнитного поля звезды, а также для омических потерь энергии осцилляций за счет джоулева нагревания внутреннего вещества звезды.
3. Выражения для сдвига фазы частиц в нейтронном интерферометре, интерферометре типа Маха-Зендера, а также выражение для разности фаз интерферирующих пучков в эксперименте Саньяка во внешнем пространстве-времени медленно вращающегося гравитирующего объекта на бранах, свидетельствующие о заметном влиянии бран-параметра на эффекты квантовой интерференции. Верхний предел на величину бран-параметра, полученный из анализа земных лабораторных экспериментов по интерферометрии частиц.
4. Выражения, описывающие тепловое излучение Хокинга ЧД в пространстве-

времени с ненулевым бран параметром, а также, описывающие процессы Блендфорда-Знаека, Мейсснера и Пенроуза в окрестности ЧД, пространство-время которой описывается метрикой Керр-Тауб-НУТ.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались и обсуждались на семинарах ИЯФ и АИ АН РУз; на научно-практической конференции "Фундаментальные и прикладные проблемы современной физики" (Ташкент, 2008 г.); на научно-практической конференции студентов и молодых ученых "Роль молодежи в сегодняшнем развитии физики" (Ташкент, 2008 г.); на республиканской конференции молодых ученых (Самарканд, 2008 г.); на II и III республиканской конференции молодых физиков Узбекистана (РКМУ, Ташкент, 2008 г., 2010 г.); на семинар-тренинге "Современные методы в астрономии" (Ташкент, 2009 г.); на школе-семинаре для одаренных студентов и молодых ученых "Актуальные проблемы современной физики" (Самарканд, 2010 г.); на республиканской научно-практической конференции "Актуальные проблемы современной физики и астрономии" (Карши, 2010 г.). Работа удостоена поощрительными премиями на II и III РКМУ.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано – печатных работ [1]–[13]. Диссертационная работа выполнена в ИЯФ АН РУз и АИ АН РУз в период 2007-2010 гг. в рамках научных проектов ГКНТ Ф - 2.1.9, Ф - 2.2.6, ФА - Ф2 - Ф079, ФА - Ф2 - Ф061, и ФПФИ АН РУз № 1 - 06, 5 - 08, 29 - 08, 1 - 11, 11 - 10.

**Личный и конкретный вклад автора.** В работах, выполненных совместно с научным руководителем и соавторами, вклад автора диссертации был определяющим. Автор выполнил основные численные и аналитические расчеты, приведенные в диссертации, активно участвовал в обсуждениях постановки задач и при анализе полученных результатов. Обобщение результатов и основные выводы, приведенные в заключительном разделе диссертации, также сформулирован автором.

**Содержание работы.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, приложений и список использованных литератур. В **введении** обосновывается актуальность темы диссертации и дается ее краткая характери-

стика.

В **первой главе** исследована структура электромагнитного поля осциллирующей намагниченной НЗ. В предположении, что вещество звезды обладает бесконечной проводимостью, сформулированы и решены общерелятивистские уравнения Максвелла во внутренней области такой звезды. При помощи полученных решений сформулированы граничные условия для электромагнитного поля на поверхности осциллирующей намагниченной НЗ. Далее, в предположении, что звезда окружена вакуумом, получены решения общерелятивистских уравнений Максвелла для электрического и магнитного полей осциллирующей НЗ непосредственно над ее поверхностью (в ближней зоне) и вдали от звезды (в волновой зоне). Данные решения получены для произвольной конфигурации невозмущенного магнитного поля звезды и поля скоростей осцилляций и позволяют качественно оценить влияние осцилляций звезды на структуру ее электромагнитного поля. С использованием полученного формализма найдены магнитное и электрическое поля вращающейся осциллирующей НЗ в очень важном частном случае – когда фоновое магнитное поле звезды имеет дипольную конфигурацию. Получено общерелятивистское выражение для дипольных электромагнитных потерь энергии вращающейся осциллирующей НЗ, которое дает результат, больший по сравнению с общеизвестным ньютоновским выражением для дипольных потерь энергии, в 2–6 раз в зависимости от компактности звезды.

Во **второй главе** результаты первой главы для электромагнитного поля в ближней и волновой зонах осциллирующей намагниченной компактной звезды, полученные в общем случае произвольной скорости осцилляций и произвольного фонового магнитного поля звезды, применены к вычислению электромагнитных полей для конкретных разновидностей звездных осцилляций: сфероидальных осцилляций, в качестве частного случая которых рассмотрены радиальные осцилляции, а также тороидальных осцилляций звезды. Для всех трех видов осцилляций получены выражения, описывающие возмущения магнитного и электрического полей в обеих зонах, связанные с осцилляциями звезды, в предположении, что фоновое магнитное поле звезды имеет

дипольную конфигурацию. Рассмотрены поправки ОТО к различным механизмам затухания осцилляций звезды, а именно, к потерям энергии осцилляций звезды за счет излучения электромагнитных волн, а также затуханию осцилляций за счет джоулева нагревания звезды в приближении ее конечной проводимости. При оценке потерь энергии звезды за счет электромагнитного излучения, генерируемого осцилляциями, показано, что релятивистское выражение дает значения, в несколько раз большие по сравнению с ньютоновским выражением, что может быть объяснено эффектом релятивистского усиления магнитного поля на поверхности звезды и гравитационным красным смещением электромагнитного излучения. Показано, что релятивистские поправки существенны также и для омических потерь энергии звезды в предположении ее конечной проводимости, но так как омические потери составляют лишь малую часть электромагнитных, этот результат является менее важным, чем предыдущий.

Полученные в данной главе результаты могут найти по крайней мере два важных применения. Во-первых, точные поправки ОТО к электромагнитным волнам, испускаемым осциллирующей звездой, в комбинации с соответствующими гравитационно-волновыми сигналами, могут быть использованы для получения важных ограничений на свойства вещества ядерной плотности, таких как плотность вещества, момент инерции, скорость вращения звезды и т.д. Во-вторых, более точная оценка потерь энергии за счет эмиссии электромагнитных волн дает возможность более точного определения времени затухания различных типов осцилляций релятивистских намагниченных звезд.

В **третьей главе** рассмотрены такие эффекты квантовой интерференции, как смещение фазы частицы в нейтронном интерферометре, в интерферометре типа Маха-Зендера, а также эффект Саньяка в пространстве-времени медленно вращающегося гравитирующего объекта с ненулевым бран-параметром. Во-всех случаях показано, что эффекты, связанные с присутствием в метрике бран-параметра, являются заметными и непренебрежимыми. Показано, что влияние бран-параметра на эксперимент Саньяка выразится в том числе в увеличении угловой скорости локально неподвижного наблюдателя по срав-

нению с соответствующей угловой скоростью в пространстве-времени Керра. Для случая нейтронной интерференции показано то, что присутствие бран-параметра вносит дополнительный член в выражение для смещения фазы интерферирующей частицы. В качестве примера полученные результаты применены к вычислению поправок ОТО к квантовым энергетическим уровням ультрахолодных нейтронов (UCN). На основе имеющихся данных о земных экспериментах по интерферометрии частиц, получен верхний предел на величину бран-параметра  $Q_* \leq 10^8 \text{ см}^2$ .

В **четвертой главе** проведен анализ релятивистских механизмов извлечения энергии ЧД в различных аксиально-симметричных гравитационных моделях. Исследовано влияние бран параметра на тепловое излучение Хокинга от ЧД в рамках пятимерной модели мира на бранах. Рассмотрены механизмы Блендфорда-Знаека, Мейсснера и Пенроуза в окрестности ЧД, внешнее пространство-время которой описывается метрикой Керр-Тауб-НУТ. В частности показано, что влияние эффекта Мейсснера на механизм Блендфорда-Знаека по извлечению энергии ЧД является незначительным, если предположить, что объект окружен магнитосферой, обладающей конечной проводимостью.

В **заключении** приведены основные результаты проведенного исследования.

### Основные результаты работы.

Получены точные аналитические релятивистские выражения для электромагнитного поля во внутренней и внешней областях вращающейся осциллирующей намагниченной компактной звезды для произвольной конфигурации невозмущенного магнитного поля звезды и скорости ее осцилляций. Получено общерелятивистское выражение для потерь энергии вращающейся осциллирующей НЗ, обладающей дипольным магнитным полем, и доказано, что за счет эффектов ОТО потери энергии такой звезды становятся больше ньютоновского значения в 2–6 раз в зависимости от параметра компактности звезды.

Получены точные аналитические релятивистские выражения для электро-

магнитного поля в ближней и волновой зонах вращающейся намагниченной компактной звезды, в случае, когда звезда испытывает а) сфероидальные, б) радиальные, в) тороидальные осцилляции. Для указанных трех случаев получены точные релятивистские выражения для потерь энергии осцилляций звезды за счет электромагнитного излучения, генерируемого осцилляциями. Показано, что учет релятивистских поправок может увеличить значение электромагнитных потерь энергии звезды до восьми раз по сравнению с ньютоновским значением, в зависимости от параметра компактности звезды и типа испытываемых осцилляций. Получено точное релятивистское выражение для затухания энергии осцилляций звезды за счет джоулева нагревания в приближении конечной проводимости звезды и показано, что поправки ОТО в этом случае также являются непренебрежимыми.

Получены выражения для смещения фазы частицы в нейтронном интерферометре, смещения фазы частицы в интерферометре типа Маха-Зендера, а также для разности фаз интерферирующих пучков в эксперименте Саньяка в пространстве-времени с ненулевым бран-параметром. На основе полученных результатов и данных об экспериментах по интерферометрии частиц получен верхний предел на значение бран параметра. Показано влияние бран параметра на величину квантовых энергетических уровней ультрахолодных нейтронов.

Получено выражение для теплового излучения Хокинга ЧД в модели мира на бранах. Получены выражения для механизмов Блендфорда-Знаека, Мейснера и Пенроуза в окрестности ЧД, пространство-время которой описывается метрикой Керр-Тауб-НУТ, свидетельствующие о заметном влиянии НУТ параметра на эти эффекты.

В данной диссертационной работе используется сигнатура пространства-времени  $(-, +, +, +)$  и система единиц в которой  $G = 1 = c$  (Однако, в выражениях с астрофизическими применениями скорость света пишется в явном виде). Греческие индексы принимают значения от 0 до 3, а латинские индексы от 1 до 3; ковариантные производные обозначаются точкой с запятой и частные производные запятой.

# ГЛАВА 1. Внешние электромагнитные поля осциллирующей релятивистской звезды.

## 1.1 Введение

Исследование электродинамики релятивистских звезд, испытывающих собственные колебания, может предоставить важную информацию не только с точки зрения астрофизики, но также и для понимания самой физической природы рассматриваемых объектов. Имеющиеся астрономические данные прямо указывают на то, что компактные релятивистские звезды обладают очень сильными магнитными полями, значения которых могут достигать порядка  $\lesssim 10^{10}$  Гс для старых НЗ, которые, как считается на данный момент, являются периодическими пульсарами и входят в состав двойных источников рентгеновского излучения малой массы. Наблюдения молодых НЗ, с другой стороны, предсказывают еще большие значения для поверхностных магнитных полей порядка  $10^{11} - 10^{13}$  Гс. В добавок к этому, из исследований явлений, связанных с периодическими источниками мягкого гамма-излучения и аномальными рентгеновскими пульсарами, следует, что поверхностные магнитные поля таких источников могут быть даже еще сильнее, доходя до значений порядка  $10^{14} - 10^{15}$  Гс [24]-[26] и приобретая такие значения за счет эффективных динамо процессов ([27], [28]).

Однако, сильные электромагнитные поля являются не единственной существенной характеристикой компактных объектов. Те же самые астроно-

мические наблюдения, которые указывают на присутствие сильных электромагнитных полей, говорят напрямую и о том, что рассматриваемые объекты являются очень компактными, а следовательно, генерируют сильные гравитационные поля. В результате этого, корректное описание электродинамики компактных объектов возможно только в том случае, если должным образом учитываются релятивистские поправки. В настоящее время имеется широкий перечень работ, исследующих "пробные" электромагнитные поля в искривленном пространстве-времени (т.е. такие поля, плотность энергии которых мала по сравнению с общей плотностью энергии массы покоя), в которых рассматриваются как сферически-симметричные метрики ([29], [30]) так и случаи медленно вращающегося пространства-времени ([31]-[33]). В одной из недавних работ ([34], [35]) исследованы внутренние и вакуумные внешние электромагнитные поля, генерируемые дипольным моментом, вращающимся совместно со звездой. В работе [34], [35] впервые был представлен систематический подход для получения аналитических выражений, описывающих электромагнитные поля в окрестности пространства-времени, близкой к поверхности звезды (так называемая ближняя зона). Этот результат был в дальнейшем расширен на случай быстрого вращения в работе [36], где был использован численный подход для решения уравнений Максвелла, который давал приближенные, но тем не менее справедливые на больших расстояниях (в так называемой волновой зоне) решения.

Предполагая наличие сильных электромагнитных полей в окрестности релятивистских звезд, можно предположить, что такие звезды, как и звезды главной последовательности, могут испытывать осцилляции с различными модами, которые можно обнаружить за счет генерации ими электромагнитных и гравитационных волн. Так как существуют наблюдательные данные об осцилляциях компактных объектов, исследования осциллирующих звезд могут предоставить уникальную возможность проверки физического состояния внутренних областей звезд, а также изучения свойств вещества при ядерных плотностях. Однако, исследование электромагнитных полей, генерируемых намагниченными осциллирующими звездами, является непростой

задачей, что подтверждается малым количеством имеющейся на этот счет литературы. Наиболее значительными работами по данному вопросу являются, согласно имеющимся у нас сведениям, работы [15] и [16]. В работе [15] были численно смоделированы электрические поля, генерируемые в волновой зоне НЗ, испытывающей как тороидальные так и сфероидальные осцилляции, с целью исследования затухания осцилляций за счет электромагнитных сил. В работе [16], напротив, были получены точные аналитические решения для электромагнитных полей, генерируемых осциллирующей НЗ с дипольным поверхностным магнитным полем, как в ближней, так и в волновой зонах. В обеих работах предполагалось, что НЗ окружена вакуумом и для простоты вычислений считалось, что магнитное поле звезды не испытывает возмущений. Авторы одной из следующих работ [17] отказались от предположения, что НЗ находится в вакууме, и подробно исследовании электродинамику звездной магнитосферы, испытывающую возмущения в результате тороидальных осцилляций звезды.

Вышеуказанные работы объединяет то, что в них использовался ньютоновский формализм описания гравитации, а как было сказано ранее, такое приближение является достаточно слабым, особенно в близкой окрестности поверхности звезды. В работе [37] было рассмотрено влияние осцилляций на электродинамику магнитосферы невращающейся шварцшильдовской звезды. В работах [38, 39] результаты, полученные в работе [37], используются для исследования влияния осцилляций коры звезды на электромагнитные потери энергии медленно вращающейся нейтронной звезды. Целью данной главы является вывод общего формализма получения решений для "пробных" электромагнитных полей в искривленном пространстве-времени сферической релятивистской звезды, испытывающей осцилляции. Задача будет решена путем обобщения подхода к описанию электродинамики вращающихся релятивистских звезд, разработанного в работах [34], [35], включением в него предположения, что проводящая кора звезды может обладать некоторым полем скоростей, возникающим в результате осцилляций звезды. Основной целью является получение аналитических решений в наиболее простой форме,

которая в дальнейшем может быть использована для астрофизических приложений. В данной главе основное внимание будет уделено разработке математического формализма и, в частности, рассмотрению двух особо важных областей, в которых могут быть получены аналитические решения – зоны, находящейся в непосредственной окрестности поверхности звезды, где очень важны поправки ОТО (ближняя зона), а также зоны, находящейся на больших расстояниях от звезды, где пространство-время приближается к плоскому (волновая зона). В обоих случаях будет показано, что релятивистские выражения для электромагнитного поля звезды отличаются двумя основными особенностями: а) усилением электромагнитного поля на поверхности звезды за счет ненулевой локальной кривизны пространства-времени и б) гравитационным красным смещением, которое испытывают электромагнитные волны при распространении в искривленном пространстве-времени.

Выражения, полученные в данной главе для компонент электромагнитного поля звезды в обеих рассматриваемых зонах, являются общими и не зависят ни от конкретной топологии магнитного поля, ни от конкретной формы поля скоростей. Приложение данных решений к исследованию наиболее часто рассматриваемых случаев тороидальных и сфероидальных осцилляций звезд будет представлено во второй главе. В данной же главе для проверки полученных решений и сравнения их с ранее известными результатами будет рассмотрен случай дипольного магнитного поля звезды и простейшее возможное возмущение поля скоростей – возмущение, генерируемое равномерным вращением диполя. В ближней зоне полученные выражения для электрического и магнитного полей будут сравнены с решениями, найденными в работах [34] и [36], тогда как в волновой зоне полученные поправки к электромагнитным полям будут использованы для вычисления релятивистских потерь энергии звезды посредством дипольного излучения. В результате будет показано, что хорошо известное выражение, полученное в рамках ньютоновского формализма и часто используемое для вычисления потерь энергии звезды на дипольное излучение (см. работы [40]-[42]), недооценивает значение потерь энергии в шесть раз в случае, если звезда является очень компактной, и в

два раза для менее компактных звезд.

Глава организована следующим образом. В параграфе 1.2 сформулированы уравнения Максвелла во внешнем пространстве-времени Шварцшильда, а в параграфе 1.3 исследуются выражения для электромагнитных полей внутри звезды и выводятся граничные условия на поверхности звезды в предположении, что поверхность является бесконечно проводящей и испытывает возмущения скорости. Параграфы 1.4 – 1.5 посвящены нахождению выражений для вакуумных электромагнитных полей в близкой окрестности источника и на больших расстояниях от него. В них представлены точные аналитические решения общерелятивистских уравнений Максвелла для произвольного магнитного поля звезды и возмущения поля скоростей. В Приложении E дается обсуждение как формализм, разработанный в данной главе, может позволить получить простое и вместе с тем очень важное применение для случая вращающегося магнитного диполя, а также приводятся релятивистские поправки к известному выражению для потерь энергии посредством дипольного электромагнитного излучения. Параграф 1.6 содержит выводы и предположения по дальнейшему использованию разработанного формализма. Ряд деталей, касающихся вычислений, выполненных в основной части главы, представлен в приложениях A–D.

## **1.2 Уравнения Максвелла в пространстве-времени Шварцшильда.**

Для исследования реакции релятивистской намагниченной звезды на возмущения общего вида необходимо совместно решать системы уравнений Максвелла и Эйнштейна. Однако эта задача является довольно сложной для большинства астрофизических приложений, и в целях упрощения процесса вычисления целесообразно ввести некоторые предположения. Первое предположение касается поправок к уравнениям Эйнштейна для полей, определяемых влиянием массы-энергии на электромагнитные поля внутри и на внешней поверхности релятивистской звезды. Нетрудно показать, что эти поправки

пропорциональны плотности электромагнитной энергии и довольно малы в очень плотных и намагниченных звездах. Действительно, если  $\langle \rho_0 \rangle$  – средняя плотность массы покоя звезды массой  $M$  и радиусом  $R$ , измеряемым на бесконечности, эти потери будут не более общей плотности энергии массы покоя:

$$\frac{B^2}{8\pi\langle\rho_0\rangle c^2} \simeq 1.6 \times 10^{-6} \left( \frac{B}{10^{15} \text{ G}} \right)^2 \left( \frac{1.4 M_\odot}{M} \right) \left( \frac{R}{15 \text{ Km}} \right)^3 . \quad (1.1)$$

Предположим, что этими поправками можно пренебречь при изучении интересующих нас объектов и рассматривать электромагнитные поля как "пробные" в заданном искривленном пространстве-времени. Некоторые авторы, интересующиеся структурными модификациями, происходящими в высоконамагниченных звездах ([33] [43] [44] [45]) предпочитают не использовать это приближение и рассматривают влияние магнитного поля на искривление пространстве-времени.

Также можно пренебречь поправками, вносимыми за счет всеобщего вращения пространства-времени, вызываемого вращением плотной звезды (эти поправки подробно описаны в работах [34], [35]). Многочисленные проверки, приведенные в [46] и [47] показывают, что это приближение достаточно хорошо работает для большинства задач, рассматриваемых в астрофизике.

Приняв указанные предположения, можно использовать в качестве фонового пространства-времени пространство-время невращающейся звезды, описываемое в сферических координатах  $(t, r, \theta, \phi)$  следующим линейным элементом

$$ds^2 = g_{00}(r)dt^2 + g_{11}(r)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 . \quad (1.2)$$

Внешнее пространство-время звезды (т.е. такое, что  $r \geq R$ ) задается решением Шварцшильда, где  $g_{00} = -N^2 \equiv -(1 - 2M/r)$  и  $g_{11} = 1/N^2$ . Метрические функции для внутреннего пространства-времени звезды, с другой стороны, могут быть определены посредством двух потенциалов  $\Lambda(r)$  и  $\Phi(r)$ , так что

$$g_{00} = -e^{2\Phi(r)} , \quad g_{11} = e^{2\Lambda(r)} = \left( 1 - \frac{2m(r)}{r} \right)^{-1} , \quad (1.3)$$

где  $\rho(r)$  – общая плотность энергии, а  $m(r) \equiv 4\pi \int_0^R r^2 \rho(r) dr$  представляет собой интеграл по пространственному объему. Точный вид этих потенциалов получается посредством решения уравнений Эйнштейна для релятивистской сферической звезды или уравнений ТОВ (см. [48]) и последующей непрерывной сшивки этих решений с внешним пространством-временем Шварцшильда, так что

$$g_{00}(r = R) = N_R^2 \equiv 1 - \frac{2M}{R}, \quad g_{11}(r = R) = \frac{1}{N_R^2}. \quad (1.4)$$

Во внешнем по отношению к звезде участке пространства-времени выберем семейство неподвижных наблюдателей с компонентами 4-скорости

$$(u^\alpha)_{\text{obs}} \equiv N^{-1} \left( 1, 0, 0, 0 \right), \quad (u_\alpha)_{\text{obs}} \equiv N \left( -1, 0, 0, 0 \right), \quad (1.5)$$

и свяжем с ними ортонормальные системы отсчета, описываемые тетрадами с четырьмя векторами  $e_{\hat{\mu}} = (e_{\hat{0}}, e_{\hat{r}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}})$  и 1-формами  $\omega^{\hat{\mu}} = (\omega^{\hat{0}}, \omega^{\hat{r}}, \omega^{\hat{\theta}}, \omega^{\hat{\phi}})$ , компоненты которых равны

$$e_{\hat{0}}^\alpha = \frac{1}{N} \left( 1, 0, 0, 0 \right), \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{0}} = N \left( 1, 0, 0, 0 \right), \quad (1.6)$$

$$e_{\hat{r}}^\alpha = N \left( 0, 1, 0, 0 \right), \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{r}} = \frac{1}{N} \left( 0, 1, 0, 0 \right), \quad (1.7)$$

$$e_{\hat{\theta}}^\alpha = \frac{1}{r} \left( 0, 0, 1, 0 \right), \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\theta}} = r \left( 0, 0, 1, 0 \right), \quad (1.8)$$

$$e_{\hat{\phi}}^\alpha = \frac{1}{r \sin \theta} \left( 0, 0, 0, 1 \right), \quad \omega_{\hat{\alpha}}^{\hat{\phi}} = r \sin \theta \left( 0, 0, 0, 1 \right), \quad (1.9)$$

и которые играют важную роль при определении "физических" компонент электромагнитных полей.

Связь между 4-векторами электрического  $E^\alpha$  и магнитного  $B^\alpha$  полей, измеряемыми наблюдателем с вектором 4-скорости  $u^\alpha$ , может быть описана с помощью тензора электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta}$

$$F_{\alpha\beta} \equiv 2u_{[\alpha} E_{\beta]} + \eta_{\alpha\beta\gamma\delta} u^\gamma B^\delta, \quad (1.10)$$

где  $T_{[\alpha\beta]} \equiv \frac{1}{2}(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha})$  и  $\eta_{\alpha\beta\gamma\delta}$  – псевдотензорное выражение для символа Леви-Чивита  $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ .

Первая пара общерелятивистских уравнений Максвелла

$$3!F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 2(F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\gamma\alpha,\beta} + F_{\beta\gamma,\alpha}) = 0 , \quad (1.11)$$

может быть спроецирована вдоль 4-векторов тетрады, связанной с собственным наблюдателем, и таким образом выражена через "физические" компоненты 3-векторов электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{B}$  полей следующим образом (см. [49])

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad \partial_t \vec{B} = -\vec{\nabla} \times (N\vec{E}) , \quad (1.12)$$

где  $\vec{\nabla}$  обозначает ковариантную производную по отношению к пространственной части метрики (1.2). Следует заметить, что уравнения (1.12) несправедливы для пространства-времени, допускающего существование вращательного вектора Киллинга (т.е. пространства-времени вращающейся релятивистской звезды), и форма, которую они должны принимать в этом случае, дана в работе [50].

Выраженные через компоненты "со шляпками" , уравнения (1.12) принимают следующий вид

$$\sin \theta \partial_r (r^2 B^{\hat{r}}) + \frac{r}{N} \partial_\theta (\sin \theta B^{\hat{\theta}}) + \frac{r}{N} \partial_\phi B^{\hat{\phi}} = 0 , \quad (1.13)$$

$$(r \sin \theta) \partial_t B^{\hat{r}} = N \left[ \partial_\phi E^{\hat{\theta}} - \partial_\theta (\sin \theta E^{\hat{\phi}}) \right] , \quad (1.14)$$

$$\left( \frac{r \sin \theta}{N} \right) \partial_t B^{\hat{\theta}} = -\partial_\phi E^{\hat{r}} + \sin \theta \partial_r (r N E^{\hat{\phi}}) , \quad (1.15)$$

$$\left( \frac{r}{N} \right) \partial_t B^{\hat{\phi}} = -\partial_r (r N E^{\hat{\theta}}) + \partial_\theta E^{\hat{r}} . \quad (1.16)$$

Если обозначить за  $\boldsymbol{w}$  4-скорость проводника, а за  $\rho_e$  плотность его заряда, произведение  $\rho_e w^\alpha$  будет представлять собой конвекционный ток, а вторая пара уравнений Максвелла запишется в следующей форме

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = 4\pi J^\alpha = 4\pi(\rho_e w^\alpha + j^\alpha) , \quad (1.17)$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование в метрике (1.2), а  $\boldsymbol{J}$  – полный электрический ток. Данное уравнение также может быть записано в терминах физических векторов электрического и магнитного полей в виде

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho_e , \quad \partial_t \vec{E} + 4\pi \vec{J} = -\vec{\nabla} \times (N\vec{B}) , \quad (1.18)$$

или, покомпонентно,

$$N \sin \theta \partial_r (r^2 E^{\hat{r}}) + r \partial_\theta (\sin \theta E^{\hat{\theta}}) + r \partial_\phi E^{\hat{\phi}} = 4\pi \rho_e r^2 \sin \theta , \quad (1.19)$$

$$\partial_\theta (\sin \theta B^{\hat{\phi}}) - \partial_\phi B^{\hat{\theta}} = \left( \frac{r \sin \theta}{N} \right) \partial_t E^{\hat{r}} + 4\pi r \sin \theta J^{\hat{r}} , \quad (1.20)$$

$$\partial_\phi B^{\hat{r}} - \sin \theta \partial_r (r N B^{\hat{\phi}}) = \left( \frac{r \sin \theta}{N} \right) \partial_t E^{\hat{\theta}} + 4\pi r \sin \theta J^{\hat{\theta}} , \quad (1.21)$$

$$\partial_r (r N B^{\hat{\theta}}) - \partial_\theta B^{\hat{r}} = \left( \frac{r}{N} \right) \partial_t E^{\hat{\phi}} + 4\pi r J^{\hat{\phi}} . \quad (1.22)$$

Следует заметить, что полный электрический ток в уравнениях (1.17) включает в себя ток проводимости  $j^\alpha$ , который переносится электронами в веществе, имеющем электропроводность  $\sigma$ , так что закон Ома может быть записан как

$$j_\alpha = \sigma F_{\alpha\beta} w^\beta . \quad (1.23)$$

До этого момента предполагалось, что звезда статична и находится в равновесии, но далее можно предположить, что вещество звезды испытывает возмущения, описываемые вектором 4-скорости  $\delta \mathbf{u}$ , так что скорость вещества звезды есть  $\mathbf{w} \equiv \delta \mathbf{u}$ , где  $\delta$  указывает на то, что возмущение является эйлеровым. Компоненты 4-скорости возмущения равны

$$\delta u^\alpha = \Gamma \left( 1, \delta v^i \right) = \Gamma \left( 1, e^{-\Lambda} \delta v^{\hat{r}}, \frac{\delta v^{\hat{\theta}}}{r}, \frac{\delta v^{\hat{\phi}}}{r \sin \theta} \right) , \quad (1.24)$$

и

$$\delta u_\alpha = \Gamma \left( -e^{2\Phi}, e^\Lambda \delta v^{\hat{r}}, r \delta v^{\hat{\theta}}, r \sin \theta \delta v^{\hat{\phi}} \right) , \quad (1.25)$$

где  $\delta v^i \equiv dx^i/dt$  – 3-скорость осциллирующих проводящего вещества звезды, а  $\delta v^{\hat{i}} \equiv \tilde{\omega}^{\hat{i}}_k \delta v^k$  – компоненты 3-скорости осцилляций в ортонормальной системе отсчета, связанной с неподвижным наблюдателем внутри звезды (базовые 1-формы неподвижного наблюдателя внутри звезды обозначены тильдой для того, чтобы их можно было отличить от базиса, заданного уравнением (1.6)). Так как интерес представляют малые возмущения скорости, для которых  $\delta v^i/c \ll 1$ , можно пренебречь членами  $\mathcal{O}(\delta v^2)$  и с использованием нормировки 4-скорости  $w_\alpha w^\alpha = -1$  получить выражения

$$\Gamma = \left[ -g_{00} \left( 1 + g_{ik} \frac{\delta v^i \delta v^k}{g_{00}} \right) \right]^{-1/2} \simeq e^{-\Phi} . \quad (1.26)$$

Следует обратить внимание, что  $\delta \mathbf{u}$  – единственные возмущения, которые необходимо рассматривать в данном случае. Несмотря на то, что другие возмущения (к примеру, возмущения давления или плотности энергии) также могут иметь место и влиять на структуру звезды, они никак не скажутся на уравнении индукции, которое будет зависеть линейно только от  $\delta \mathbf{u}$  (см. уравнения (1.10)). Далее для простоты предположим, что  $\delta \mathbf{u}$  есть заданная функция и она не обязательно является решением задачи на собственные значения (этот вопрос подробно рассмотрен в работе [51]). Окончательно, так как электромагнитные поля в данном рассмотрении являются "пробными", можно не принимать во внимание возмущения, вносимые ими в пространство-время (1.2), и работать, таким образом, в рамках так называемого приближения Каулинга.

Введение возмущений скорости приведет к важным поправкам в выражениях для электрического и магнитного полей в трех различных областях пространства: а) внутренней области звезды,  $r < R$ ; б) ближней зоне, т.е. вакуумной области вне поверхности звезды с радиальной координатой  $r \gtrsim R$ ; в) волновой зоне, то есть области, расположенной на больших расстояниях от звезды  $r \gg R$ , где возмущения будут распространяться в виде электромагнитных волн. В каждой из рассматриваемых областей поправки приводят к наблюдаемым эффектам, и дальнейшие параграфы посвящены рассмотрению двух из этих областей в общем случае произвольного возмущения скорости и произвольной топологии магнитного поля звезды.

### 1.3 Электромагнитные поля внутри звезды

В данном параграфе рассматриваются модификации внутренних электромагнитных полей, генерируемые возмущениями скорости различного вида. Несмотря на то, что эти поля невозможно наблюдать непосредственно, они, а в особенности их значения на поверхности звезды, оказывают важное влияние на электромагнитные волны, генерируемые осцилляциями, и посредством этого могут быть зафиксированы на бесконечности.

Для начала из закона Ома (1.23) и выражения для 4-скорости (1.24) можно в явном виде получить компоненты полного тока  $J^{\hat{\alpha}}$ :

$$J^{\hat{r}} = \rho_e e^{-\Phi} \delta v^{\hat{r}} + \sigma \left[ E^{\hat{r}} + e^{-\Phi} \left( \delta v^{\hat{\theta}} B^{\hat{\phi}} - \delta v^{\hat{\phi}} B^{\hat{\theta}} \right) \right], \quad (1.27)$$

$$J^{\hat{\theta}} = \rho_e e^{-\Phi} \delta v^{\hat{\theta}} + \sigma \left[ E^{\hat{\theta}} + e^{-\Phi} \left( \delta v^{\hat{\phi}} B^{\hat{r}} - \delta v^{\hat{r}} B^{\hat{\phi}} \right) \right], \quad (1.28)$$

$$J^{\hat{\phi}} = \rho_e e^{-\Phi} \delta v^{\hat{\phi}} + \sigma \left[ E^{\hat{\phi}} + e^{-\Phi} \left( \delta v^{\hat{r}} B^{\hat{\theta}} - \delta v^{\hat{\theta}} B^{\hat{r}} \right) \right]. \quad (1.29)$$

Общепринятым является упрощение подобной задачи предположением, что вещество является идеальным проводником, т.е. обладает электропроводностью  $\sigma \rightarrow \infty$  (предел идеальной магнитогидродинамики). Несмотря на то, что это предположение является идеализацией, оно очень хорошо описывает данный случай, так как характерное время омического рассеяния на несколько порядков больше, чем характерное время осцилляций звезды. Принимая данное предположение, из уравнений (1.27)–(1.29) можно легко получить выражения для электромагнитного поля внутри звезды в виде

$$E_{\text{int}}^{\hat{r}} = -e^{-\Phi} \left( \delta v^{\hat{\theta}} B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} - \delta v^{\hat{\phi}} B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} \right), \quad (1.30)$$

$$E_{\text{int}}^{\hat{\theta}} = -e^{-\Phi} \left( \delta v^{\hat{\phi}} B_{\text{int}}^{\hat{r}} - \delta v^{\hat{r}} B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} \right), \quad (1.31)$$

$$E_{\text{int}}^{\hat{\phi}} = -e^{-\Phi} \left( \delta v^{\hat{r}} B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} - \delta v^{\hat{\theta}} B_{\text{int}}^{\hat{r}} \right), \quad (1.32)$$

где индексом "int" обозначено то, что поля являются внутренними и  $r \leq R$ . Уравнения Максвелла (1.13)–(1.16) совместно с выражениями (1.30)–(1.32) приводят к следующему ряду уравнений для магнитного поля:

$$(r \sin \theta) \partial_t B_{\text{int}}^{\hat{r}} = \partial_\phi \left( \delta v^{\hat{r}} B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} - \delta v^{\hat{\phi}} B_{\text{int}}^{\hat{r}} \right) + \partial_\theta \left[ \sin \theta \left( \delta v^{\hat{r}} B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} - \delta v^{\hat{\theta}} B_{\text{int}}^{\hat{r}} \right) \right], \quad (1.33)$$

$$(r \sin \theta) \partial_t B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} = \partial_\phi \left( \delta v^{\hat{\theta}} B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} - \delta v^{\hat{\phi}} B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} \right) - \sin \theta e^{-\Lambda} \partial_r \left[ r \left( \delta v^{\hat{r}} B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} - \delta v^{\hat{\theta}} B_{\text{int}}^{\hat{r}} \right) \right], \quad (1.34)$$

$$r \partial_t B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} = e^{-\Lambda} \partial_r \left[ r \left( \delta v^{\hat{\phi}} B_{\text{int}}^{\hat{r}} - \delta v^{\hat{r}} B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} \right) \right] - \partial_\theta \left( \delta v^{\hat{\theta}} B_{\text{int}}^{\hat{\phi}} - \delta v^{\hat{\phi}} B_{\text{int}}^{\hat{\theta}} \right). \quad (1.35)$$

Граничные условия для магнитного поля на поверхности звезды  $r = R$  могут быть получены отсюда требованием непрерывности нормальной компоненты ( $r$ -компоненты)

$$B_{\text{ext}}^{\hat{r}}|_{r=R} = B_R^{\hat{r}}, \quad (1.36)$$

тогда как тангенциальные компоненты (т.е.  $\theta$  и  $\phi$ -компоненты) испытывают скачок, определяемый поверхностными токами

$$B_{\text{ext}}^{\hat{\theta}}|_{r=R} = B_R^{\hat{\theta}} + 4\pi I^{\hat{\phi}}, \quad (1.37)$$

$$B_{\text{ext}}^{\hat{\phi}}|_{r=R} = B_R^{\hat{\phi}} - 4\pi I^{\hat{\theta}}, \quad (1.38)$$

где  $I^{\hat{k}}$  – компоненты поверхностного тока и  $B_R^{\hat{i}} \equiv B_{\text{int}}^{\hat{i}}|_{r=R}$  (индекс “ext” указывает на то, что поля являются внешними, т.е.  $r \geq R$ ). Подобным образом граничные условия для электрического поля на поверхности звезды могут быть получены требованием непрерывности тангенциальных компонент, тогда как нормальная компонента испытывает скачок, пропорциональный поверхностному заряду  $\Sigma_s$ . С помощью простых выкладок можно получить

$$E_{\text{ext}}^{\hat{r}}|_{r=R} = E_{\text{int}}^{\hat{r}}|_{r=R} + 4\pi\Sigma_s = -\frac{1}{N_R} \left( \delta v_R^{\hat{\theta}} B_R^{\hat{\phi}} - \delta v_R^{\hat{\phi}} B_R^{\hat{\theta}} \right) + 4\pi\Sigma_s, \quad (1.39)$$

$$E_{\text{ext}}^{\hat{\theta}}|_{r=R} = E_{\text{int}}^{\hat{\theta}}|_{r=R} = -\frac{1}{N_R} \left( \delta v_R^{\hat{\phi}} B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\phi}} \right), \quad (1.40)$$

$$E_{\text{ext}}^{\hat{\phi}}|_{r=R} = E_{\text{int}}^{\hat{\phi}}|_{r=R} = -\frac{1}{N_R} \left( \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\theta}} - \delta v_R^{\hat{\theta}} B_R^{\hat{r}} \right), \quad (1.41)$$

где  $\delta v_R^{\hat{i}} \equiv \delta v^{\hat{i}}|_{r=R}$  – скорости осцилляций на поверхности звезды, единственно важная компонента осцилляций для данного исследования.

## 1.4 Электромагнитные поля в ближней зоне

Рассмотрим вид электромагнитного поля, генерируемого звездными осцилляциями, во внешней вакуумной области звезды в непосредственной окрестности ее поверхности. Анализ, проводимый в данном параграфе, является максимально общим и не ограничен ни конкретной топологией магнитного поля звезды, ни конкретной формой поля скоростей. Более подробное исследование электромагнитных полей, генерируемых наиболее часто рассматриваемыми тороидальными и сфероидальными осцилляциями звезды, будет представлен в следующей главе.

Обозначая характерную частоту звездных осцилляций за  $f_0$ , можно определить ближнюю зону, как зону, распространяющуюся на расстояние  $\lambda \sim$

$c/f_0$  от поверхности звезды, т.е. на расстояние, проходимое электромагнитной волной за время  $1/f_0$ . Для типичной НЗ с массой  $M$  и радиусом  $R$  характерная частота осцилляций равна  $f_0 \sim \sqrt{GM/R^3} \sim 2 - 3$ , так что ближняя зона тянется от  $R$  до  $\sim 100 R$ . Так как в данной главе пренебрегается членами порядка  $\mathcal{O}(\delta v^2)$  в уравнениях Максвелла, можно не рассматривать токи смещения в уравнениях (1.20)–(1.22) и положить

$$\partial_t E^{\hat{r}} = \partial_t E^{\hat{\theta}} = \partial_t E^{\hat{\phi}} \equiv 0, \quad (1.42)$$

так что вторая пара уравнений Максвелла переписется как

$$N \sin \theta \partial_r (r^2 E^{\hat{r}}) + r \partial_\theta (\sin \theta E^{\hat{\theta}}) + r \partial_\phi E^{\hat{\phi}} = 0, \quad (1.43)$$

$$\partial_\theta (\sin \theta B^{\hat{\phi}}) - \partial_\phi B^{\hat{\theta}} = 0, \quad (1.44)$$

$$\partial_\phi B^{\hat{r}} - \sin \theta \partial_r (r N B^{\hat{\phi}}) = 0, \quad (1.45)$$

$$\partial_r (N r B^{\hat{\theta}}) - \partial_\theta B^{\hat{r}} = 0. \quad (1.46)$$

Решения уравнений Максвелла для полей, источником которых является пространственно ограниченное распределение токов, меняющихся со временем по гармоническому закону, могут быть легче всего получены в том случае, если электромагнитные поля разложены по мультипольным компонентам. Эффективный метод для получения такого мультипольного разложения был предложен в работе [52] в рамках ньютоновской электродинамики, и в данном методе использованы основные свойства соленоидальных векторных полей. В данной главе этот подход обобщается на случай релятивистской электродинамики. Рассмотрим четыре скалярные функции  $S, T, X$  и  $Z$ , с помощью которых общие решения вакуумных уравнений Максвелла (1.13)–(1.16) и (1.43)–(1.46) могут быть записаны в виде

$$B^{\hat{r}} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta S) + \partial_\phi^2 S], \quad (1.47)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{N}{r} \partial_\theta \partial_r S + \frac{1}{N r \sin \theta} \partial_\phi Z, \quad (1.48)$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{N}{r \sin \theta} \partial_\phi \partial_r S - \frac{1}{N r \sin \theta} \partial_\theta Z, \quad (1.49)$$

и

$$E^{\hat{r}} = -\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} [\sin \theta \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta T) + \partial_\phi^2 T] , \quad (1.50)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{N}{r} \partial_{\theta r} T + \frac{1}{Nr \sin \theta} \partial_\phi X , \quad (1.51)$$

$$E^{\hat{\phi}} = \frac{N}{r \sin \theta} \partial_{\phi r} T - \frac{1}{Nr} \partial_\theta X . \quad (1.52)$$

В дальнейшем функции  $S$ ,  $Z$  и  $T$ ,  $X$  будем называть "магнитными" и "электрическими" функциями, соответственно. Более того, предположим, что угловые переменные могут быть разделены и угловая часть разложена по сферическим гармоникам  $Y_{\ell m}(\theta, \phi)$

$$S(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} S_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) , \quad (1.53)$$

$$X(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} X_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) , \quad (1.54)$$

$$T(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} T_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) , \quad (1.55)$$

$$Z(t, r, \theta, \phi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} Z_{\ell m}(t, r) Y_{\ell m}(\theta, \phi) . \quad (1.56)$$

С использованием данного анзаца, опуская знак суммы по индексам  $\ell, m$ , можно получить общие решения уравнений (1.47)–(1.52) для компонент магнитного поля

$$B^{\hat{r}} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} S_{\ell m} Y_{\ell m} , \quad (1.57)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{N}{r} \partial_r S_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} + \frac{1}{Nr \sin \theta} Z_{\ell m} \partial_\phi Y_{\ell m} , \quad (1.58)$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{N}{r \sin \theta} \partial_r S_{\ell m} \partial_\phi Y_{\ell m} - \frac{1}{Nr} Z_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} , \quad (1.59)$$

и для компонент электрического поля

$$E^{\hat{r}} = \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} T_{\ell m} Y_{\ell m} , \quad (1.60)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{N}{r} \partial_r T_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} + \frac{1}{Nr \sin \theta} X_{\ell m} \partial_\phi Y_{\ell m} , \quad (1.61)$$

$$E^{\hat{\phi}} = \frac{N}{r \sin \theta} \partial_r T_{\ell m} \partial_\phi Y_{\ell m} - \frac{1}{Nr} X_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} . \quad (1.62)$$

Далее сконцентрируемся на том, как, используя уравнения Максвелла, представить выражения (1.57)–(1.62) в форме, более пригодной для использования в астрофизике.

### 1.4.1 Магнитные поля

Подставляя общие решения (1.57)–(1.59) для магнитного поля в уравнения Максвелла (1.44)–(1.46), можно получить два уравнения для неизвестных функций  $Z_{\ell m}$  и  $S_{\ell m}$ :

$$\left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y_{\ell m}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2 Y_{\ell m} \right] Z_{\ell m} = 0 , \quad (1.63)$$

$$\frac{d}{dr} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{d}{dr} S_{\ell m} \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} S_{\ell m} = 0 , \quad (1.64)$$

особенностью которых является то, что они зависят только от  $Z$  или от  $S$ , т.е. могут быть решены по отдельности. Первое уравнение имеет тривиальное решение  $Z_{\ell m} = 0$ , так как содержимое квадратных скобок в (1.63) является функцией только  $\theta$  и  $\phi$ . Решение уравнения (1.64), однако, является не таким простым. Здесь удобно ввести новую переменную

$$x \equiv 1 - \frac{r}{M} , \quad (1.65)$$

и выделить очевидную квадратичную радиальную зависимость функций  $S_{\ell m}$ , которые теперь определяются как

$$S_{\ell m} \equiv r^2 h(t, r) . \quad (1.66)$$

С использованием (1.65) и (1.66) уравнение (1.64) принимает следующий вид

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \frac{d}{dx} \left[ (1-x)^2 h \right] \right\} + \ell(\ell+1) h = 0 , \quad (1.67)$$

и может быть решено при помощи функций Лежандра второго рода  $Q_\ell(x)$  (см. [18]), так что

$$S_{\ell m}(t, r) = \frac{r^2}{M^3} \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] s_{\ell m}(t) . \quad (1.68)$$

Выбор функции Лежандра второго рода в качестве решения уравнения (1.64) обусловлен предельными условиями. Все сингулярные решения находятся вне области применимости этих решений (решения являются внешними и имеют место при  $r \geq R$ ). Следует заметить, что вся зависимость от времени в выражении (1.68) заключена в постоянных интегрирования  $s_{\ell m}(t)$ , которые легко находятся после наложения соответствующих граничных условий на поверхности звезды.

Далее рассмотрим, как меняются эти выражения при введении возмущений, вызванных, к примеру, ненулевым полем скоростей (1.24). Здесь и далее предполагается, что звезда обладает магнитным полем, характерное время изменения которого значительно дольше характерного времени осцилляций, так что поле может рассматриваться как статическое. Компоненты невозмущенного магнитного поля звезды (нулевого порядка по возмущениям) обозначим через  $B_0^i$ , а возмущения магнитного поля первого порядка, которые, очевидно, зависят от времени, обозначим через  $\delta B^i(t)$ .

В линейном порядке по возмущениям удобный способ отделения возмущенной части магнитного поля напрашивается из самой структуры решений (1.57)–(1.59), вся временная зависимость которых заключена в  $s_{\ell m}$ . В результате возмущение магнитного поля может быть выражено через новую, зависящую от времени константу интегрирования  $\delta s_{\ell m}(t)$ , которая просто добавляется к невозмущенной константе  $s_{\ell m}$ . Новые компоненты магнитного поля, генерируемые возмущением скорости, будут, таким образом, иметь следую-

щий вид

$$B^{\hat{r}} = B_0^{\hat{r}} + \delta B^{\hat{r}}(t) = \frac{\ell(\ell+1)}{M^3} \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] [s_{\ell m} + \delta s_{\ell m}(t)] Y_{\ell m}, \quad (1.69)$$

$$B^{\hat{\theta}} = B_0^{\hat{\theta}} + \delta B^{\hat{\theta}}(t) = - \left[ -\frac{1+x}{(1-x)^3} \right]^{1/2} \frac{1}{M^3} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^2 \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] \right\} [s_{\ell m} + \delta s_{\ell m}(t)] \partial_\theta Y_{\ell m}, \quad (1.70)$$

$$B^{\hat{\phi}} = B_0^{\hat{\phi}} + \delta B^{\hat{\phi}}(t) = - \left[ -\frac{1+x}{(1-x)^3} \right]^{1/2} \frac{1}{M^3} \frac{d}{dx} \left\{ (1-x)^2 \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] \right\} [s_{\ell m} + \delta s_{\ell m}(t)] \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m}. \quad (1.71)$$

Значения констант интегрирования  $\delta s_{\ell m}(t)$  могут быть получены с помощью достаточно простых вычислений, если предположить, что моды осцилляций имеют гармоническую зависимость от времени  $\exp(i\omega t)$ , где  $\omega$  – частота моды. В этом случае радиальная компонента уравнения индукции (1.33) на поверхности звезды принимает следующий вид

$$\partial_t(\delta B_R^{\hat{r}}) = i\omega \delta B_R^{\hat{r}} = \frac{1}{R \sin \theta} \left\{ \partial_\phi \left( \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\phi}} - \delta v_R^{\hat{\phi}} B_R^{\hat{r}} \right) + \partial_\theta \left[ \sin \theta \left( \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\theta}} - \delta v_R^{\hat{\theta}} B_R^{\hat{r}} \right) \right] \right\}, \quad (1.72)$$

и для определения коэффициентов  $\delta s_{\ell m}(t)$  остается применить граничное условие непрерывности радиальной компоненты магнитного поля (1.36) (детали вычислений приведены в работе [50]). Следует заметить, что данные вычисления отличаются от проведенных в работе [17], где для определения констант интегрирования использовались граничные условия непрерывности тангенциальных компонент электрического поля. В конечном счете, однако, оба пути являются эквивалентными и дают одинаковые результаты.

На этом этапе следует сделать некоторые замечания. Первое касается предположения о бесконечной проводимости вещества звезды, что подразумевает увлечение магнитного поля вместе с веществом, если оно обладает ненулевой скоростью. Это условие может быть записано с помощью релятивистского выражения для "вмороженного потока"

$$\partial_t \delta \vec{B} = \vec{\nabla} \left( \delta \vec{v} \times \vec{B}_0 \right), \quad (1.73)$$

и вполне подтверждается выражениями (1.69)–(1.71) (функция  $N$  не входит в выражение (1.73) для магнитного поля за счет замещения вклада, вносимого электрическим полем в уравнения Максвелла, законом Ома, детали см. в ). Второе замечание, которое следует сделать - несмотря на то, что полученные выражения являются общими и за счет этого представляют большой интерес, они не являются полезными сами по себе, если только не сконцентрировать внимание на какой-либо конкретной конфигурации магнитного поля, что будет сделано в параграфе для случая статического дипольного магнитного поля звезды. Следует также заметить, что до настоящего момента не было наложено никакого условия на вид введенных возмущений скорости, который содержится в выражениях для функций  $\delta s_{\ell m}(t)$ ; в параграфах и вид этих функций будет обсуждаться для случая равномерно вращающегося магнитного диполя.

#### 1.4.2 Электрические поля

Далее остановимся на компонентах электрического поля звезды и рассмотрим для этого решения уравнений Максвелла (1.14)–(1.16) и (1.43). Здесь и далее предполагается, что звезда обладает нулевым суммарным электрическим зарядом (т.е.  $\int \rho_e \sqrt{\gamma} d^3 \mathbf{x} = 0$ , где  $\gamma$  – определитель 3-метрики, а  $d^3 \mathbf{x}$  – элемент координатного объема) и что невозмущенное магнитное поле звезды является стационарным (т.е.  $\partial_t B_0^i = 0$ ). В этом случае невозмущенное электрическое поле звезды будет тождественно равно нулю ( $E_0^i = 0$ ), но будет присутствовать зависящая от времени поправка первого порядка  $\delta E^i(t)$ , вызванная возмущениями магнитного поля звезды.

Чтобы получить выражения для возмущенного электрического поля, необходимо подставить выражения (1.50)–(1.52) в уравнения Максвелла (1.14)–(1.16) и (1.43), в результате чего можно получить следующий ряд уравнений

для неизвестных функций  $T_{\ell m}$  и  $X_{\ell m}$ :

$$\frac{d}{dr} \left[ \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{d}{dr} T_{\ell m} \right] - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} T_{\ell m} = 0 , \quad (1.74)$$

$$\ell(\ell+1) Y_{\ell m} X_{\ell m} = -r^2 \partial_t B^{\hat{r}} , \quad (1.75)$$

$$\partial_r X_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} = -\frac{r}{N} \partial_t B^{\hat{\theta}} , \quad (1.76)$$

$$\partial_r X_{\ell m} \partial_\phi Y_{\ell m} = -\frac{r \sin \theta}{N} \partial_t B^{\hat{\phi}} . \quad (1.77)$$

Очевидно, что уравнение (1.74) для функций  $T_{\ell m}$  совпадает по виду с уравнением (1.64), и, таким образом, будет иметь решения в терминах функций Лежандра второго рода  $Q_\ell(x)$  с константами интегрирования  $\delta t_{\ell m}(t)$ :

$$T_{\ell m} = r^2 \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] \delta t_{\ell m}(t) . \quad (1.78)$$

В общем случае мультипольного магнитного поля "функции электрического поля"  $X_{\ell m}(t)$  определяются напрямую из производных по времени от "функций магнитного поля"  $S_{\ell m}$  (см. уравнения (1.57) и (1.75)), так что

$$X_{\ell m} = -\partial_t S_{\ell m} = \frac{r^2}{M^3} \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] \delta x_{\ell m}(t) , \quad (1.79)$$

где  $\delta x_{\ell m}(t) = -\partial_t [\delta s_{\ell m}(t)]$ . Из выражения (1.79) видно, что функции  $X_{\ell m}$  представляют собой вклад в электрическое поле, обусловленный вариациями магнитного поля, с коэффициентами  $\delta x_{\ell m}$ , определяемыми в этом случае также из соответствующих граничных условий.

Используя выражения (1.78) и (1.79), а также стандартную рекуррентную формулу для функций Лежандра, приведенную в приложении А, можно записать решения для компонент вакуумного электрического поля (1.60)–(1.62)

В следующем виде

$$\delta E^{\hat{r}}(t) = \frac{M^2}{r^2} \ell^2 (\ell + 1) \left[ Q_{\ell-1} - \left(1 + \frac{r}{M}\right) Q_{\ell} \right] \delta t_{\ell m}(t) Y_{\ell m}, \quad (1.80)$$

$$\begin{aligned} \delta E^{\hat{\theta}}(t) = & \frac{M^2}{r^2 N} \ell^2 (\ell + 1) \left[ \left(1 - \frac{r}{M}\right) Q_{\ell} - Q_{\ell-1} \right] \delta t_{\ell m}(t) \partial_{\theta} Y_{\ell m} + \\ & \frac{r}{M^3 N \sin \theta} \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_{\ell}}{dx} \right] \delta x_{\ell m}(t) \partial_{\phi} Y_{1m}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

$$\begin{aligned} \delta E^{\hat{\phi}}(t) = & \frac{M^2}{r^2 N \sin \theta} \ell^2 (\ell + 1) \left[ \left(1 - \frac{r}{M}\right) Q_{\ell} - Q_{\ell-1} \right] \delta t_{\ell m}(t) \partial_{\phi} Y_{\ell m} - \\ & \frac{r}{M^3 N} \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_{\ell}}{dx} \right] \delta x_{\ell m}(t) \partial_{\theta} Y_{1m}, \end{aligned} \quad (1.82)$$

где снова  $Q_{\ell} = Q_{\ell}(x)$ . Из уравнений (1.80)–(1.82) явно следует, что в случае, когда магнитное поле имеет мультипольные компоненты до  $\ell$ -го порядка, соответствующее электрическое поле будет иметь мультипольные компоненты вплоть до  $(\ell + 1)$ -го порядка. Это еще раз подчеркивает внутреннюю связь между электрическим и магнитным полями, заключенную в уравнениях Максвелла.

В заключение, константы интегрирования  $\delta t_{\ell m}$  и  $\delta x_{1m}$  могут быть найдены из условий разрыва (1.40)–(1.41) тангенциальных компонент электрического поля (2.13)–(2.14) на поверхности звезды, и даются выражениями

$$\begin{aligned} \delta t_{\ell m}(t) = & \frac{MR^2}{\ell^3 (\ell + 1)^2} \left[ \left(1 - \frac{R}{M}\right) Q_{\ell}(R) - Q_{\ell-1}(R) \right]^{-1} \int d\Omega \left\{ \partial_{\theta} Y_{\ell m}^* \right. \\ & \left. \times \left[ \delta v_R^{\hat{\phi}}(t) B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}}(t) B_R^{\hat{\phi}} \right] - i \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} \left[ \delta v_R^{\hat{\theta}}(t) B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}}(t) B_R^{\hat{\theta}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

$$\begin{aligned} \delta x_{\ell m}(t) = & \frac{f_R}{R} \int d\Omega \left\{ \partial_{\theta} Y_{\ell m}^* \left[ \delta v_R^{\hat{\theta}}(t) B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}}(t) B_R^{\hat{\theta}} \right] + \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} \right. \\ & \left. \times \left[ \delta v_R^{\hat{\phi}}(t) B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}}(t) B_R^{\hat{\phi}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.84)$$

где  $Q_{\ell}(R) \equiv Q_{\ell}(1 - R/M)$ ,  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ , а  $f_R$  – краткое обозначение для

$$\begin{aligned} f_R \equiv & -\frac{3}{8} \left( \frac{R}{M} \right)^3 \left[ \ln N_R^2 + \frac{2M}{R} \left( 1 + \frac{M}{R} \right) \right] = \\ & -\frac{3}{8} \left( \frac{R}{M} \right)^3 \left[ \ln \left( 1 - \frac{2M}{R} \right) + \frac{2M}{R} \left( 1 + \frac{M}{R} \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.85)$$

## 1.5 Электромагнитные поля в волновой зоне

Исследование электромагнитных полей в волновой зоне может быть начато с рассмотрения уравнений Максвелла (1.13)–(1.16) и (1.19)–(1.22) в случае, когда отсутствуют электрические токи и заряды. В частности, подставляя уравнения (1.15) и (1.16) в производную по времени от уравнения (1.20), а также используя выражение (1.19) для вакуума (т.е. для случая  $\rho_e = 0$ ), можно получить следующее волновое уравнение для радиальной компоненты электрического поля в искривленном пространстве-времени Шварцшильда:

$$\partial_t^2 E^{\hat{r}} - \frac{N^2}{r^2} \partial_r [\partial_r (r^2 E^{\hat{r}})] - N^2 \left[ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta E^{\hat{r}}) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 E^{\hat{r}} \right] = 0 . \quad (1.86)$$

Подставляя разложение (1.60) радиальной компоненты электрического поля по сферическим гармоникам в волновое уравнение (1.86), можно получить хорошо известное уравнение Редже-Уилера, описывающее динамику векторных возмущений в пространстве-времени Шварцшильда (см. [53]):

$$(\partial_t^2 - \partial_{r_*}^2) T_{\ell m} + \ell(\ell + 1) \frac{N^2}{r^2} T_{\ell m} = 0 , \quad (1.87)$$

где введена координата  $r_* \equiv r + 2M \ln(r/2M - 1)$ . (Подобные уравнения могут быть получены также для функций  $S_{\ell m}$ ,  $X_{\ell m}$  и  $Z_{\ell m}$ .)

Несмотря на то, что уравнение (1.87) широко исследовалось в литературе и содержит информацию о различных релятивистских эффектах (недавние исследования приведены в работе [54]), оно предоставляет не самый удобный способ нахождения компонент электрического и магнитного полей в волновой зоне. Релятивистскими поправками порядка  $\mathcal{O}(M/r)$  в этом уравнении можно обоснованно пренебречь и в этом случае теряется путь определения компонент электромагнитного поля из ньютоновских выражений.

Следует заметить, что предположение о том, что фоновое пространство-время для электромагнитных полей в волновой зоне плоское, является, конечно, лишь приближением, но оно не противоречит релятивистскому подходу, применяемому до настоящего момента. Как будет видно в дальнейшем, конечные выражения, получаемые в плоском пространстве-времени, должны

быть дополнены конкретными граничными условиями, накладываемыми на поверхности звезды, и посредством данных граничных условий решения будут содержать поправки, связанные с кривизной пространства-времени. Более того, использование плоского пространства-времени является не только хорошим приближением, но имеет также два важных преимущества. Первым является то, что в этом случае возможно получение аналитических выражений для электромагнитного поля в терминах сферических функций Ганкеля и их производных, тогда как при точном релятивистском рассмотрении необходимо численное решение обыкновенного дифференциального уравнения для получения вида электромагнитного поля в волновой зоне (это будет обсуждаться в дальнейшем). Вторым преимуществом является то, что для частного, но очень важного случая вращающегося магнитного диполя, получаемые с помощью данного формализма поправки к ньютоновским выражениям имеют очень простую физическую интерпретацию.

Выразим электромагнитное поле в волновой зоне через две скалярные функции  $U$  и  $V$  (иногда называемые "потенциалами Дебая"), угловая часть которых может быть разложена в ряд по сферическим функциям и которые имеют гармоническую зависимость от времени

$$\begin{aligned} U(t, r, \theta, \phi) &\equiv rU_{\ell m}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)e^{-i\omega t} , \\ V(t, r, \theta, \phi) &\equiv rV_{\ell m}(r)Y_{\ell m}(\theta, \phi)e^{-i\omega t} . \end{aligned} \quad (1.88)$$

Заметим, что в искривленном внешнем пространстве-времени звезды, наблюдаемая частота звездных осцилляций будет разной для разных наблюдателей, являясь, таким образом, функцией координаты в пространстве. В частности, если  $k^\alpha$  – нулевой волновой вектор электромагнитного поля в волновой зоне, а  $u^\alpha$  – 4-скорость наблюдателя, то частота, измеряемая данным наблюдателем, будет равна  $\omega \equiv -k^\alpha u_\alpha$ . Обозначая за  $\omega_R \equiv \omega(r = R)$  угловую скорость осцилляций, измеряемую наблюдателем на поверхности звезды, можно получить выражение для соответствующей частоты электромагнитной волны на расстоянии  $r > R$ , испытывающей стандартное гравитационное красное

смещение, в виде (см. работе [50])

$$\omega(r) = \omega_R \frac{N_R}{N} = \omega_R \sqrt{\left(\frac{R-2M}{r-2M}\right) \frac{r}{R}}. \quad (1.89)$$

В асимптотически плоской области пространства-времени, каковой является рассматриваемая волновая зона, частота электромагнитных волн достигнет предельного значения, которое равно  $\omega \simeq \omega_R N_R = \text{const}$ .

Принимая во внимание данные предположения и следуя подходу, предложенному в работах [52] и [55], можно получить компоненты электромагнитного поля в волновой зоне в следующем общем виде

$$B^{\hat{r}} = \frac{1}{r} U_{\ell m} Y_{\ell m} e^{-i\omega t}, \quad (1.90)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r\ell(\ell+1)} \left[ \partial_r (rU_{\ell m}) \partial_{\theta} Y_{\ell m} - \frac{i\omega}{\sin\theta} rV_{\ell m} \partial_{\phi} Y_{\ell m} \right] e^{-i\omega t}, \quad (1.91)$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\ell(\ell+1)} \left[ \partial_r (rU_{\ell m}) \frac{1}{\sin\theta} \partial_{\phi} Y_{\ell m} + i\omega rV_{\ell m} \partial_{\theta} Y_{\ell m} \right] e^{-i\omega t}, \quad (1.92)$$

и

$$E^{\hat{r}} = \frac{1}{r} V_{\ell m} Y_{\ell m} e^{-i\omega t}, \quad (1.93)$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r\ell(\ell+1)} \left[ \partial_r (rV_{\ell m}) \partial_{\theta} Y_{\ell m} + \frac{i\omega}{\sin\theta} rU_{\ell m} \partial_{\phi} Y_{\ell m} \right] e^{-i\omega t}, \quad (1.94)$$

$$E^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r\ell(\ell+1)} \left[ \partial_r (rV_{\ell m}) \frac{1}{\sin\theta} \partial_{\phi} Y_{\ell m} - i\omega rU_{\ell m} \partial_{\theta} Y_{\ell m} \right] e^{-i\omega t}. \quad (1.95)$$

Астрономические наблюдения указывают на присутствие у типичной компактной звезды фонового магнитного поля, которое можно считать стационарным на отрезке времени, равном периоду осцилляций. Фоновое электрическое поле будет в таком случае либо равно нулю, либо генерироваться вариациями во времени магнитного поля (вызванными осцилляциями звезды или ее вращением). В нашем случае в волновой зоне не будут присутствовать невозмущенные фоновые электромагнитные поля и выражения (1.90)–(1.95) будут, таким образом, описывать вклад, вносимый только возмущениями. При этом они должны обозначаться символом “ $\delta$ ”, но для компактности записи выражений, а также не имея необходимости отличать их от соответствующих невозмущенных величин, символ “ $\delta$ ” будет в дальнейшем опущен.

Подставляя выражения (1.90)–(1.95) в уравнения Максвелла для плоского пространства-времени, можно получить обыкновенное "волнового типа" уравнение для потенциала Дебая  $U$  (либо  $V$ ) в виде

$$\partial_t^2 U - \partial_r^2 U - \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta U) - \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 U = 0, \quad (1.96)$$

которое в случае пространства-времени Шварцшильда примет форму

$$\partial_t^2 \tilde{U} - N^2 \partial_r (N^2 \partial_r \tilde{U}) - N^2 \left[ \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta \tilde{U}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\phi^2 \tilde{U} \right] = 0. \quad (1.97)$$

Заметим, что уравнения (1.96) и (1.97) не являются волновыми для потенциалов  $U$  и  $V$  (а также соответствующих релятивистских потенциалов  $\tilde{U}$  и  $\tilde{V}$ ), но являются волновыми для потенциалов  $U_{\ell m}$  и  $V_{\ell m}$  (и соответствующих релятивистских  $\tilde{U}_{\ell m}$  и  $\tilde{V}_{\ell m}$ ).

Основным преимуществом приближения плоского пространства-времени в волновой зоне является тот факт, что несмотря на то, что уравнение (1.97) не может быть решено аналитически, уравнение (1.96) имеет аналитическое решение (регулярное везде, кроме  $r = 0$ ), выраженное через сферические функции Ганкеля  $H_\ell(\omega r)$  в виде

$$U_{\ell m}(r) = [\ell(\ell + 1)]^{1/2} H_\ell(\omega r) u_{\ell m}, \quad V_{\ell m}(r) = -[\ell(\ell + 1)]^{1/2} \quad (1.98)$$

так что компоненты магнитного поля даются общими выражениями

$$B^{\hat{r}} = \frac{e^{-i\omega t} \sqrt{\ell(\ell + 1)}}{r} H_\ell(\omega r) u_{\ell m} Y_{\ell m}, \quad (1.99)$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left( D H_\ell(\omega r) u_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} - \omega H_\ell(\omega r) v_{\ell m} \frac{m Y_{\ell m}}{\sin \theta} \right), \quad (1.100)$$

$$B^{\hat{\phi}} = i \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left( D H_\ell(\omega r) u_{\ell m} \frac{m Y_{\ell m}}{\sin \theta} - \omega H_\ell(\omega r) v_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} \right), \quad (1.101)$$

тогда как компоненты электрического поля могут быть записаны как

$$E^{\hat{r}} = -\frac{e^{-i\omega t} \sqrt{\ell(\ell + 1)}}{r} H_\ell(\omega r) v_{\ell m} Y_{\ell m}, \quad (1.102)$$

$$E^{\hat{\theta}} = -\frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left( D H_\ell(\omega r) v_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} + \omega H_\ell(\omega r) u_{\ell m} \frac{m Y_{\ell m}}{\sin \theta} \right), \quad (1.103)$$

$$E^{\hat{\phi}} = -i \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{\ell(\ell + 1)}} \left( D H_\ell(\omega r) v_{\ell m} \frac{m Y_{\ell m}}{\sin \theta} + \omega H_\ell(\omega r) u_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} \right). \quad (1.104)$$

Здесь радиальная производная обозначена как  $DH_\ell(\omega r) \equiv (\omega r)^{-1} \partial_r [rH_\ell(\omega r)]$  и используется то, что сферические функции Ганкеля имеют простые предельные выражения для малых значений аргументов, а именно для  $\omega r \approx \omega_R R \ll 1$ ,

$$H_\ell(\omega r) \approx -i(2\ell - 1)!!(\omega r)^{-\ell-1}, \quad DH_\ell(\omega r) \approx i(2\ell - 1)!!\ell(\omega r)^{-\ell-2}, \quad (1.105)$$

тогда как для больших значений аргументов они демонстрируют типичное для колебаний поведение (см., к примеру [56])

$$H_\ell(\omega r) \approx (-i)^{\ell+1} \frac{e^{i\omega r}}{\omega r}, \quad DH_\ell(\omega r) \approx (-i)^\ell \frac{e^{i\omega r}}{\omega r} \quad \omega r \rightarrow \infty. \quad (1.106)$$

Отметим, что ньютоновские выражения (1.99)–(1.104) не являются новыми и обсуждались ранее рядом авторов (см., к примеру, [15]). Однако, новые релятивистские поправки возникают в выражениях (1.99)–(1.104), если коэффициенты интегрирования  $u_{\ell m}$  и  $v_{\ell m}$  определяются путем сопоставления этих выражений с выражениями на поверхности звезды при помощи граничных условий (1.40)–(1.41):

$$v_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{Re^{i\omega_R t}}{\left[ \partial_r \left( \frac{R_\ell(\omega r)}{N} \right) \right]_{|r=R} N_R^2} \int d\Omega \left\{ \partial_\theta Y_{\ell m}^* \left[ \delta v_R^{\hat{\phi}} B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\phi}} \right] + i \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} \left[ \delta v_R^{\hat{\theta}} B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\theta}} \right] \right\}, \quad (1.107)$$

$$u_{\ell m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \frac{RN_R e^{i\omega_R t}}{R_\ell(\omega_R R) \omega_R} \int d\Omega \left\{ i \partial_\theta Y_{\ell m}^* \left[ \delta v_R^{\hat{\theta}} B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\theta}} \right] + \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} \left[ \delta v_R^{\hat{\phi}} B_R^{\hat{r}} - \delta v_R^{\hat{r}} B_R^{\hat{\phi}} \right] \right\}. \quad (1.108)$$

Как будет видно из дальнейших рассуждений, все релятивистские поправки могут быть найдены правильным определением констант интегрирования (1.107)–(1.108). К примеру, в случае электромагнитного излучения, генерируемого вращающимся диполем, константы интегрирования будут ответственны за очень важные количественные релятивистские поправки к известным формулам.

## 1.6 Выводы

Существует большое количество наблюдательных фактов, подтверждающих наличие сильных электромагнитных полей в окрестности релятивистских звезд. В то же время, естественно предполагать, что такие звезды могут быть подвержены возмущениям различного типа, генерирующим звездные осцилляции, за счет которых может осуществляться эмиссия электромагнитных и гравитационных волн. Возможное детектирование сигналов обоих типов одновременно может предоставить важную информацию о массе и радиусе излучающих объектов и, таким образом, позволить исследовать свойства вещества при ядерных плотностях. На основе релятивистского формализма для описания электродинамики намагниченных НЗ, разработанного в работе [18] [57], в данной главе были исследованы электромагнитные поля, генерируемые в том случае, когда идеально проводящая кора намагниченной релятивистской звезды обладает ненулевым полем скоростей. Предполагалось, что вещество внутри звезды описывается релятивистским политропным уравнением состояния с бесконечной проводимостью, а также что звезда окружена вакуумом. Релятивистские поправки, связанные с вращением звезды, а также вклад плотности энергии электромагнитного поля в метрику пространства-времени считались пренебрежимыми. Сделанные предположения справедливы для большого числа вращающихся намагниченных НЗ.

Как и в работах [34], [35], особое внимание было уделено тому, чтобы получаемые выражения для электромагнитных полей, будучи аналитическими, были записаны также в максимально простой форме, явным образом отражали связь между ньютоновскими выражениями и релятивистскими поправками, и вследствие этого могли быть с легкостью использованы в астрофизических приложениях. Данная глава большей частью посвящена получению математического формализма, который отличает решение в ближней зоне звезды (где электромагнитные поля квазистационарны) от решения на очень больших расстояниях (где электромагнитные поля ведут себя как волны). Фактически, в обоих этих областях можно найти решения уравнений Макс-

велла в ОТО и сравнить две главные поправки с соответствующими ньютоновскими выражениями. Первая поправка связана с усилением электромагнитных полей на поверхности звезды, обусловленным искривлением фонового пространства-времени. Следует заметить, что хотя решение уравнений Максвелла для волновой зоны формально совпадает с решениями в плоском пространстве-времени, константы интегрирования, определенные на поверхности звезды, накладывают важный отпечаток на общерелятивистские поправки, которые содержат информацию о массе и радиусе осциллирующей звезды.

Общерелятивистские выражения для электромагнитных полей, представленные здесь, не отражают какую-либо специфическую топологию магнитного поля или поля скоростей, и в этом смысле являются наиболее общими. Но, для того чтобы обосновать полученные выражения и рассмотреть астрофизически важный случай, отдельно была исследована такая форма электромагнитных полей, когда фоновые магнитные поля дипольны и поле скоростей на поверхности звезды образуется при равномерном вращении диполя. Эта конфигурация часто используется как самая простая модель электромагнитного излучения пульсаров и была обширно исследована в прошлом. Тогда как аналитические выражения в ньютоновской теории тяготения существуют как в ближней зоне, так и в волновой зоне, общерелятивистские выражения ограничены ближней зоной. Сравнение этих выражений показывает, что формализм, используемый в данной главе, гибок и разумен. Далее, использование аналитических выражений для компонент электромагнитных полей в волновой зоне позволяет вычислить общерелятивистские выражения для потерь электромагнитной энергии при дипольном излучении. Простое сравнение с соответствующими ньютоновскими выражениями показывает, что последние недооценивают эти потери в 2 – 6 раз в зависимости от факторов, определяющих плотность звезды.

Данная работа позволяет применять формализм, представленный здесь, для исследования наиболее часто встречающихся при изучении колебаний звезды сфероидальных и тороидальных конфигураций полей скоростей. Ре-

зультаты этого исследования представлены в следующей главе.

# ГЛАВА 2. Электромагнитные поля во внешнем пространстве осциллирующей релятивистской звезды. Сфероидальные и тороидальные поля скоростей

## 2.1 Введение

Исследование электромагнитных полей осциллирующей НЗ является весьма интересной задачей. Большое количество имеющихся наблюдательных данных о пульсарах делает эту проблему важной с точки зрения релятивистской астрофизики. Помимо этого ожидается, что последние усовершенствования наблюдательных технологий могут привести к обнаружению гравитационных волн и, посредством них, позволить исследование звездных осцилляций. Все это является важным для проверки эффектов ОТО для электромагнитных полей вокруг звезды. Хотя эффекты ОТО являются важными для НЗ с сильными гравитационными полями, изучение электродинамики осциллирующей намагниченной НЗ ограничено несколькими моделями в рамках ньютоновской механики. Структура электромагнитных полей, генерируемых вращающейся НЗ, была определена в классической работе [58]. Это решение сыграло основную роль в предлагаемом здесь анализе медленно вращающихся звезд в ОТО, в котором решение Дойча применяется к НЗ в метрике, предложенном [59]. Изучение электромагнитных полей осциллирующих звезд с учетом релятивистских эффектов для произвольной конфигурации скорости проводящей коры было представлено в предыдущей главе. В данной

главе будут рассмотрены электромагнитные поля, генерируемые тороидальными и сфероидальными осцилляциями звездной поверхности с замороженным дипольным магнитным полем. Вычисления будут основаны на формализме, разработанном в предыдущей главе для описания электродинамики осциллирующей релятивистской звезды с произвольной конфигурацией магнитного поля и произвольным полем скоростей возмущений с учетом поправок ОТО.

Глава организована следующим образом: в параграфе 2.2 дается подробное обсуждение электромагнитных полей в ближней зоне окрестности звезды, соответствующих сфероидальным и тороидальным осцилляциям. Предполагается, что пространство-время вне звезды описывается метрикой Шварцшильда и звезда имеет невозмущенное внутреннее дипольное магнитное поле. Следующий параграф 2.3 посвящен вычислению вакуумных электромагнитных волн в далекой зоне, генерируемых сфероидальными и тороидальными осцилляциями звездного магнитного поля. Также будет показано, что в пределе плоского пространства-времени решения в ближней и волновой зонах для вычисленных мод осцилляций совпадают с результатами [16]. В параграфе 2.4 будет исследовано электромагнитное затухание осцилляций а) за счет электромагнитного излучения осциллирующей намагниченной шварцшильдовской звезды, обладающей бесконечной проводимостью, и б) за счет джоулевого нагрева при конечной, но высокой проводимости звезды. Будут вычислены потери энергии для некоторых мод осцилляций, которые имеют астрофизическое значение, и подчеркнуты причины релятивистской модификации ньютоновских выражений для потери энергии осциллирующей намагниченной звезды.

## 2.2 Электромагнитные поля в ближней зоне

Электромагнитное поле осциллирующих звезд может быть разделено на три области - внутренние поля внутри звезды, квазистационарное электромагнитное поле вблизи поверхности звезды и электромагнитное поле в дальней зоне. В предыдущей главе приведены точные аналитические выражения

для электромагнитных полей внутри и во внешней области звезды (I30) - (I32) для произвольной конфигурации магнитного поля звезды и скорости осцилляций. Целью данной работы является рассмотрение электромагнитных полей, индуцированных конкретного вида звездными осцилляциями во внешней вакуумной зоне в сферической системе координат, элемент длины которой дается выражением (1.2).

### 2.2.1 Магнитные поля

Как было показано в предыдущей главе, в линейном режиме по возмущениям можно ввести добавки, связанные с осцилляциями, в компоненты магнитного поля  $\delta B^i$  с помощью новой зависимости от времени  $\delta s_{\ell m}(t)$ , которая просто прибавляется к фоновому полю  $s_{\ell m}(t)$ . В результате новые компоненты магнитного поля, генерируемые возмущениями скорости, при условии, что невозмущенное магнитное поле звезды имеет дипольную конфигурацию ( $l = 1$ ), имеют форму (E.5-E.7). Значения констант интегрирования  $\delta s_{1m}(t)$  могут быть вычислены непосредственно, если предположить, что моды осцилляций имеют простую гармоническую форму типа  $\exp(-i\omega_R t)$ , где  $\omega_R$  - частота моды, определенная на поверхности звезды. В таком случае, согласно уравнению (B4) в работе [50], можно получить

$$\begin{aligned} \partial_t \delta s_{1m}(t)|_{r=R} = & -\frac{3R}{8f_R} \int d\Omega Y_{1m}^* \left\{ (\nabla_\Omega^2 S) \frac{1}{R \sin \theta} [\partial_\theta (\sin \theta \delta v^\theta) + \partial_\phi \delta v^\phi] \right. \\ & + \left[ N_R \partial_r (\nabla_\Omega^2 S) \delta v^r + \frac{1}{R} \partial_\theta (\nabla_\Omega^2 S) \delta v^\theta + \frac{1}{R \sin \theta} \partial_\phi (\nabla_\Omega^2 S) \delta v^\phi \right] \\ & \left. + N_R \left[ (\partial_\theta \partial_r S) \partial_\theta \delta v^r + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\partial_\phi \partial_r S) \partial_\phi \delta v^r \right] \right\} \Big|_{r=R}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ ,  $\nabla_\Omega^2$  - угловая часть Лапласиана, *m.e.*

$$\nabla_\Omega^2 \equiv \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\phi^2, \quad (2.2)$$

а компоненты скорости осцилляций на поверхности звезды записываются как

$$\delta u^\alpha|_{r=R} = \frac{1}{N_R} \left( 1, \delta v_R^i \right) = \frac{1}{N_R} \left( 1, N_R \delta v_R^r, \frac{\delta v_R^\theta}{R}, \frac{\delta v_R^\phi}{R \sin \theta} \right), \quad (2.3)$$

и

$$\delta u_\alpha|_{r=R} = \frac{1}{N_R} \left( -N_R^2, \frac{1}{N_R} \delta v_R^r, R \delta v_R^\theta, R \sin \theta \delta v_R^\phi \right), \quad (2.4)$$

где  $\delta v_R^i \equiv dx^i/dt|_{r=R}$  – 3-скорость осцилляций проводящего звездного вещества на поверхности звезды.

В случае диполя скалярная функция  $S$  равна

$$S = S_{1m}(r) Y_{1m} = \frac{r^2}{2M^3} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] s_{1m} Y_{1m}, \quad (2.5)$$

где

$$s_{10} = -\frac{\sqrt{3\pi}}{4} B_0 R^3 \cos \chi, \quad s_{11} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{B_0 R^3}{2} \sin \chi, \quad (2.6)$$

$B_0 \equiv 2\mu/R^3$  – (ньютоновское) значение магнитного поля на полярной оси, и можно показать, что (В.4) выражается как

$$\begin{aligned} \partial_t \delta s_{1m}(t)|_{r=R} = \frac{3B_0 R^2}{8f_R} \int d\Omega Y_{1m}^* \left\{ (\cos \chi \cos \theta + \sin \chi \sin \theta e^{i\phi}) \times \right. \\ \left. \left[ \frac{f_R}{\sin \theta} \left[ \partial_\theta (\sin \theta \delta v^{\hat{\theta}}) + \partial_\phi \delta v^{\hat{\phi}} \right] + 2h_R \delta v^{\hat{r}} \right] - (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta e^{i\phi}) \right. \\ \left. - \left[ h_R \partial_\theta \delta v^{\hat{r}} + f_R \delta v^{\hat{\theta}} \right] + i \sin \chi e^{i\phi} \left[ f_R \delta v^{\hat{\phi}} + \frac{1}{\sin \theta} h_R \partial_\phi \delta v^{\hat{r}} \right] \right\}. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Невозмущенные компоненты магнитного поля на поверхности звезды даются выражениями

$$B_R^r = f_R B_0 (\cos \chi \cos \theta + \sin \chi \sin \theta e^{i\phi}), \quad (2.8)$$

$$B_R^\theta = h_R B_0 (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta e^{i\phi}), \quad (2.9)$$

$$B_R^\phi = -i h_R B_0 (\sin \chi e^{i\phi}), \quad (2.10)$$

где релятивистские поправки к интенсивности магнитных полей на поверхности звезды появляются за счет следующих параметров

$$h_R = \frac{3R^2 N_R}{8M^2} \left[ \frac{R}{M} \ln N_R^2 + \frac{1}{N_R^2} + 1 \right], \quad (2.11)$$

и  $f_R$  определяется как (Е.23) определяемых так же как и в предыдущей главе,  $\chi$  – угол между магнитной осью и осью осцилляций. В ньютоновском пределе  $\lim_{M/R \rightarrow 0} f_R = 1, \lim_{M/R \rightarrow 0} h_R = 1/2$ .

Следует сделать два замечания. Первое – о предположении бесконечной проводимости звездного вещества; в таком случае, фактически, магнитное поле увлекается жидкостью, когда последняя имеет ненулевую скорость. Это обусловлено условием "вмороженности"(1.73). Во-вторых, выражения (Е.5)–(Е.7), (2.7) являются общими в том смысле, что при их выводе не накладывались никакие условия на тип осцилляций. Вид возмущений скорости входит в выражения (2.7) для функции  $\delta s_{1m}(t)$  и будет обсуждаться ниже для некоторых основных конфигураций осцилляций. Что касается конфигурации магнитного поля – в дальнейшем мы ограничимся случаем дипольного невозмущенного магнитного поля звезды.

### 2.2.2 Электрические поля

Согласно предыдущей главе, решение для вакуумного электрического поля в близкой зоне, генерированных пертурбациями дипольного магнитного поля, может быть написано как

$$\delta E^r = \frac{M^2}{r^2} \ell^2 (\ell + 1) \left[ Q_{\ell-1} - \left(1 + \frac{r}{M}\right) Q_\ell \right] \delta t_{\ell m} Y_{\ell m} , \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \delta E^\theta &= \frac{M^2}{r^2 N} \ell^2 (\ell + 1) \left[ \left(1 - \frac{r}{M}\right) Q_\ell - Q_{\ell-1} \right] \delta t_{\ell m} \partial_\theta Y_{\ell m} \\ &+ \frac{r}{2N \sin \theta} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r}\right) \right] \delta x_{1m} \partial_\phi Y_{1m} , \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \delta E^\phi &= \frac{M^2}{r^2 N \sin \theta} \ell^2 (\ell + 1) \left[ \left(1 - \frac{r}{M}\right) Q_\ell - Q_{\ell-1} \right] \delta t_{\ell m} \partial_\phi Y_{\ell m} \\ &- \frac{r}{2N} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{M}{r}\right) \right] \delta x_{1m} \partial_\theta Y_{1m} , \end{aligned} \quad (2.14)$$

где  $Q_\ell = Q_\ell(x) = Q_\ell(1 - r/M)$  – функции Лежандра второго рода [56]. Следует отметить взаимосвязь между электрическим и магнитным полями, которая ясно выражена в уравнениях (2.12)–(2.14) и заключается в том, что магнитному полю с мультипольными компонентами вплоть до порядка  $\ell$ , будет соответствовать электрическое поле с мультипольными компонентами вплоть до порядка  $\ell + 1$ .

Константы интегрирования могут быть выражены через магнитное поле

и скорость на поверхности звезды:

$$\delta t_{\ell m}(t) = \frac{MR^2}{\ell^3(\ell+1)^2} \left[ \left(1 - \frac{R}{M}\right) Q_\ell(R) - Q_{\ell-1}(R) \right]^{-1} \int d\Omega \times \quad (2.15)$$

$$\times \left\{ \partial_\theta Y_{\ell m}^* [\delta v_R^\phi(t) B_R^r - \delta v_R^r(t) B_R^\phi] - i \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} [\delta v_R^\theta(t) B_R^r - \delta v_R^r(t) B_R^\theta] \right\},$$

$$\delta x_{\ell m}(t) = \frac{f_R}{R} \int d\Omega \left\{ \partial_\theta Y_{\ell m}^* [\delta v_R^\theta(t) B_R^r - \delta v_R^r(t) B_R^\theta] + \right. \\ \left. + \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} [\delta v_R^\phi(t) B_R^r - \delta v_R^r(t) B_R^\phi] \right\}, \quad (2.16)$$

где  $Q_\ell(x_R) \equiv Q_\ell(1 - R/M)$ .

Рассуждения, приведенные в предыдущей главе, были общими в том смысле, что не вводилось никаких ограничивающих условий на вид выражения для скорости осцилляций за исключением случая равномерного вращения, который был рассмотрен в качестве простого примера. Ниже будут подробно рассмотрены конфигурации электромагнитного поля для тех полей скоростей, которые часто встречаются в астрофизике.

### 2.2.3 Поле скоростей сфероидальных осцилляций

Общий вид скорости сфероидальных осцилляций дается выражениями

$$\delta v^i = \left( \eta(r) Y_{\ell' m'}(\theta, \phi), \xi(r) \partial_\theta Y_{\ell' m'}(\theta, \phi), \frac{\xi(r)}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) \right) e^{-i\omega t}, \quad (2.17)$$

где  $\omega$  – частота осцилляций,  $\eta(r)$  и  $\xi(r)$  представляют собой радиальные собственные функции сфероидальных осцилляций. Отметим также, что здесь использованы разные индексы мультипольности  $\ell'$  и  $m'$  для того, чтобы различить гармоническую зависимость возмущений скорости от гармонической зависимости электромагнитных полей.

Предположим, что звезда имеет дипольное фоновое магнитное поле (т.е.  $\ell = 1$ ), не обязательно направленное по полярной оси (т.е.  $\chi \neq 0$ ), и подвергается осцилляциям с полем скоростей (2.17). Тогда константы интегрирования (2.7) для сфероидальных осцилляций дипольного магнитного поля примут

форму

$$\begin{aligned} \partial_t \delta s_{1m}(t) = -i\omega_R \delta s_{1m} = & -\frac{3R^2}{8f_R} B_0 e^{-i\omega_R t} \int d\Omega Y_{1m}^* \left\{ [2h_R \eta_R + f_R \xi_R \ell'(\ell' + 1)] \times \right. \\ & \times Y_{\ell'm'}(\cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi e^{i\phi}) + [h_R \eta_R + f_R \xi_R] \left[ Y_{\ell'm',\theta} \left( \sin \theta \cos \chi \right. \right. \\ & \left. \left. - \cos \theta \sin \chi e^{i\phi} \right) - \frac{i}{\sin \theta} \sin \chi e^{i\phi} Y_{\ell'm',\phi} \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Таким образом, для моды осцилляций  $\ell' = 1, m' = 0$  константы интегрирования (2.18) равны вещественным частям следующих выражений

$$\begin{aligned} \delta s_{10} &= -i \frac{27\pi}{128} \frac{R^2}{f_R \omega_R} B_0 (h_R \eta_R + f_R \xi_R) e^{-i\omega_R t} \sin \chi, \\ \delta s_{11} &= i \frac{9\pi}{\sqrt{2} \cdot 128} \frac{R^2}{f_R \omega_R} B_0 (h_R \eta_R + f_R \xi_R) e^{-i\omega_R t} \cos \chi, \end{aligned} \quad (2.19)$$

и возмущенное магнитное поле в ближней зоне принимает вид (F.1)-(F.3) В ближней зоне единственная ненулевая компонента электрического поля равна

$$\begin{aligned} \delta E^\phi = \sqrt{\frac{3\pi}{4}} \frac{9rR^2}{256M^3 N f_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] B_0 (h_R \eta_R - 3\xi_R f_R) \\ e^{-i\omega_R t} \sin \theta \sin \chi, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где константа интегрирования

$$\delta x_{10} = \frac{9\pi}{128} \frac{R^2}{f_R M^3} B_0 (h_R \eta_R - 3f_R \xi_R) e^{-i\omega_R t} \sin \chi. \quad (2.21)$$

## 2.2.4 Поле скоростей радиальных осцилляций

Далее рассмотрим случай, когда невращающаяся намагниченная звезда подвержена радиальным осцилляциям с полем скоростей

$$\delta v^i(r, t) \equiv \left( \eta(r), 0, 0 \right) e^{-i\omega t}, \quad (2.22)$$

где  $\eta(r)$  – амплитуда колебаний скорости и предполагается, что осцилляции равны нулю в центре звезды, т.е.  $\eta(0) = 0$ , и  $\eta_R \equiv \eta(R) \neq 0$ .

Отметим, что, в принципе, собственная функция должна быть вычислена решением соответствующей задачи на собственное значение; здесь, однако, она будет рассмотрена просто как заданная функция, значение которой на поверхности звезды имеет влияние на интенсивность электромагнитных полей. Конечно, сама поверхность звезды также подвержена радиальным осцилляциям и ее положение во времени будет определяться выражением

$$R(t) = R_0 + \int \delta v^r(R_0, t) dt , \quad (2.23)$$

где  $R_0$  – положение поверхности звезды в момент  $R_0$

Предположим, что  $\eta = \eta_0 e^{-i\omega t}$  – смещение звездной коры в радиальном направлении. Из условия квазистационарности  $\omega\eta \ll 1$  можно оценить параметр  $\epsilon = \frac{\eta}{R_0} \ll 1$  для типичных осцилляций вблизи поверхности звезды. Тогда положение поверхности звезды (2.23)

$$R(t) = R_0 + \frac{\eta}{R_0} R_0 = R_0(1 + \epsilon) . \quad (2.24)$$

Из-за изменения положения поверхности звезды невозмущенное магнитное поле на ней будет зависеть от времени как

$$B_0 = \frac{2\mu}{R^3} \simeq \frac{2\mu}{R_0^3}(1 - 3\epsilon) = \tilde{B}_0(1 - 3\epsilon) . \quad (2.25)$$

Производная от магнитного поля по времени равна

$$\begin{aligned} \partial_t B(t, r) &= \partial_t [B_0(t, r)e^{-i\omega t}] \simeq -\tilde{B}_0(t, r)e^{-i\omega t} [3\partial_t \epsilon + i\omega(1 - 3\epsilon)] = \\ &= -i\omega \tilde{B}_0(t, r)e^{-i\omega t} , \end{aligned} \quad (2.26)$$

так как  $\partial_t \epsilon = -i\omega \epsilon$ .

Используя уравнения (E.5)-(E.7) с условием для константы интегрирования  $\delta s_{\ell m}$ , можно показать, что возмущенное магнитное поле

$$\delta s_{10}(t) = -i \sqrt{\frac{3\pi}{4}} \frac{h_R R^2}{f_R \omega_R} B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} \cos \chi , \quad (2.27)$$

$$\delta s_{11}(t) = -i \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{h_R R^2}{f_R \omega_R} B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} \sin \chi , \quad (2.28)$$

будет иметь компоненты, определяемые выражениями (F.4)–(F.6)

Следует отметить, что константы интегрирования (2.27) и (2.28) можно было бы легко получить из констант интегрирования для сфероидальных мод (2.18) если предположить в них  $Y_{\ell'm'} = 1$ .

Электрическое поле будет иметь нулевое невозмущенное значение, но ненулевое возмущение первого порядка  $|\delta E| \propto |\delta v B_0|$ , индуцированное возмущением магнитного поля за счет радиальных осцилляций. Выражение для возмущения электрического поля может быть непосредственно получено из уравнений (2.12)–(2.14). В частности, используя радиальное поле скоростей (2.22) в выражении (2.15) и условие  $\partial_\phi Y_{\ell m} = imY_{\ell m}$ , можно легко видеть, что константы интегрирования  $t_{\ell m}$  тождественно равны нулю, так же как интеграл

$$- \int d\Omega \left\{ \partial_\theta Y_{\ell m}^* v_R^r B_R^\phi - i \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} v_R^r B_R^\theta \right\} = -\delta v_R^r \frac{N_R}{R} \partial_r S_{\ell m}(R) \times \\ \int d\Omega \left\{ \partial_\theta Y_{\ell m}^* \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell m} - i \frac{m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta} \partial_\theta Y_{\ell m} \right\} = 0 . \quad (2.29)$$

В результате, электрическое поле имеет компоненты (F.7)–(F.9). Следует подчеркнуть, что, фактически, частоты осцилляций подвержены стандартному гравитационному красному смещению, так что частота  $\omega(r)$  в произвольной точке определяется уравнением (1.89) Строго говоря, как было недавно обсуждено в [60], гравитационное красное смещение фотона, испущенного по направлению и против направления вращения релятивистской звезды будет различным. Можно ожидать такое же изменение формулы для красного смещения для осцилляционного движения. Однако, как можно видеть из результатов [60], для медленно вращающихся звезд изменение формулы для красного смещения (1.89) пренебрежимо мало.

Полезно также отметить, что полученное решение (F.8)–(F.9) гарантирует  $E^i B_i = 0$ , выражая тот факт, что ускорение частиц невозможно вдоль возмущенных электромагнитных полей в ближней зоне. Далее, выражения (F.8)–(F.9) имеют весьма простое объяснение. Чтобы увидеть это, рассмотрим случай, в котором диполь направлен вдоль полярной оси, т.е.  $\chi = 0$ , и звезда испытывает радиальные осцилляции. Тогда магнитное поле будет только полоидальным, и естественно ожидать, что любое возмущение это-

го магнитного поля будет производить новое осциллирующее электрическое поле, которое будет чисто тороидальным.

Наконец отметим, что, как ожидалось, ньютоновские пределы выражений для электрических полей (F.8) и (F.9) переходят в решения, полученные в [16] (уравнение (B2))

$$\lim_{M/r, M/R \rightarrow 0} \delta E^\theta = \frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 B_0 \eta_R e^{-i\omega t} \sin \chi \sin \phi , \quad (2.30)$$

$$\lim_{M/r, M/R \rightarrow 0} \delta E^\phi = -\frac{1}{2} \left( \frac{R}{r} \right)^2 B_0 \eta_R e^{-i\omega t} (\sin \theta \cos \chi - \sin \chi \cos \theta \cos \phi) \quad (2.31)$$

### 2.2.5 Поле скоростей тороидальных осцилляций

Далее можно исследовать более сложное поле скоростей и, в частности, оценить возможное влияние тороидальных осцилляций на электромагнитные поля релятивистских звезд. В этом случае поле скоростей осцилляций имеет компоненты (ур-е (13.71) в работе [61])

$$\delta v^i = \left( 0, \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) , -\partial_\theta Y_{\ell' m'}(\theta, \phi) \right) \eta(r) e^{-i\omega t} , \quad (2.32)$$

где снова  $\omega$  – частота осцилляций, а  $\eta(r)$  представляет собой радиальную собственную функцию тороидальных осцилляций.

Поле тороидальных скоростей (2.32) является интересным само по себе и в последнее время привлекло большое внимание научного сообщества, так как оно соответствует полю  $r$ -мод осцилляций при наблюдении в системе отчета, вращающейся вместе со звездой. Недавно было показано, что такие моды, фактически, могут привести к нестабильным осцилляциям с экспоненциально возрастающими амплитудами [62].

Константы интегрирования (2.7) для тороидальных осцилляций дипольного магнитного поля принимают форму

$$\partial_t \delta s_{1m}(t) = -i\omega_R \delta s_{1m} = -\frac{3R^2}{8} B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} \int d\Omega Y_{1m}^* \times \left\{ (\sin \theta \cos \chi - \cos \theta \sin \chi e^{i\phi}) \frac{1}{\sin \theta} \partial_\phi Y_{\ell' m'} + i \sin \chi e^{i\phi} \partial_\theta Y_{\ell' m'} \right\} . \quad (2.33)$$

Компоненты возмущенного магнитного поля, генерируемого тороидальными осцилляциями с  $\ell' = m' = 1$ , при ненулевом угле между начальным магнитным полем звезды и осью тороидального вращения определяются выражениями (F.10)–(F.12). Компоненты электрического поля во внешней области намагниченной звезды, наклоненной по отношению к оси моды (т.е. тороидальная мода имеет произвольную ориентацию), для мод осцилляций с  $\ell' = 1, m' = 0$  имеют вид (F.14)–(F.16)

Неисчезающая константа интегрирования в данном случае

$$\begin{aligned}\delta t_{20} &= -\frac{1}{9\sqrt{15}} \frac{f_R}{N_R^2 g_R} B_0 \eta_R \cos \chi e^{-i\omega_R t}, \\ \delta t_{10} &= -\frac{27\pi}{256} \frac{f_R R^3}{N_R g_R M^3} B_0 \eta_R \sin \chi e^{-i\omega_R t}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

## 2.3 Электромагнитные поля в волновой зоне

Компоненты магнитных полей определяются общими выражениями (1.99)–(1.101), тогда как компоненты электрического поля выражаются как (1.102)–(1.104) (см. также (1.105)–(1.106)). Коэффициенты интегрирования  $u_{\ell m}$  и  $v_{\ell m}$  определяются через соответствие электромагнитных полей (1.99)–(1.104) граничным условиям на поверхности звезды, так что величины  $v_{\ell m}$  и  $u_{\ell m}$  имеют вид (1.107) – (1.108).

Далее будут получены выражения для электромагнитных полей в волновой зоне, генерируемых различными полями скоростей, приведенными в параграфах 2.2.3–2.2.5.

### 2.3.1 Поле скоростей сфероидальных осцилляций

Исходящее электромагнитное излучение имеет  $m = m'$  и  $\ell = \ell'$ ,  $\ell\ell' \pm 1$  (см., например, (Rose 1955) для типичных звездных осцилляций и [63] для низкорядковых осцилляций). В этом пределе, в качестве примера, вычислим электромагнитные поля, излучаемые осцилляционной модой  $\ell' = 1, m' = 0$ . Можно показать, что в этом специфическом случае неисчезающие коэффи-

циенты выражаются через  $u_{20}$  и имеют явный вид

$$\begin{aligned}
u_{10} &= -i \frac{3}{8\sqrt{2}} \frac{\omega_R R^2}{N_R} B_0 (\eta_R h_R - 3\xi_R f_R) \sin \chi , \\
u_{20} &= \frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{5}} \frac{\omega_R^2 R^3}{N_R} B_0 (\eta_R h_R + \xi_R f_R) \cos \chi , \\
v_{20} &= -\frac{1}{16} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R} B_0 \eta_R h_R \sin \chi .
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Используя этот результат, электромагнитные поля (1.99)–(1.104), индуцируемые в волновой зоне осцилляционной модой  $\ell' = 1, m' = 0$ , можно выразить как вещественные части решений (F.17)–(F.22)

Так как волновая зона находится за пределами светового цилиндра, *т.е.* в области  $r \gg r_{lc} \equiv 1/\Omega$ , выражения (F.17)–(F.22) показывают, что в этой зоне электромагнитные поля ведут себя как типичные радиально расходящиеся волны, для которых  $|B^r/B^\theta| \sim 1/\omega r \ll 1$ .

Электромагнитные поля, испускаемые осцилляционной модой  $\ell' = 2, m' = 2$ , имеют более сложную форму. Можно показать, что для мультипольного расходящегося излучения, для которого  $l = 3$  единственный ненулевой коэффициент  $u_{32}$  ( $v_{32} = 0$ ) имеет следующий явный вид

$$u_{32} = -\frac{1}{15\sqrt{21}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R} B_0 (3\xi_R f_R - 2\eta_R h_R) \cos \chi . \tag{2.36}$$

Квадрупольное излучение, для которого  $l = 2$ , имеет единственный ненулевой коэффициент  $u_{32}$  ( $v_{32} = 0$ ), задаваемый выражением

$$v_{22} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{1}{6}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R} B_0 \eta_R h_R \cos \chi . \tag{2.37}$$

Используя эти результаты, можно показать, что мультипольные электромагнитные поля, индуцируемые в волновой зоне осцилляционной модой  $\ell' = 2, m' = 2$ , равны вещественным частям решений (F.23)–(F.28).

### 2.3.2 Поле скоростей радиальных осцилляций

Из асимптотической формы (1.106) и (1.105) следует, что решение (1.99)–(1.104) для дипольного случая ( $l = 1$ ) в волновой зоне ( $\omega r \rightarrow \infty$ ) для радиаль-

ных осцилляций (2.22) имеет вид (F.29)–(F.34), которое удовлетворяет условию  $E^i B_i = 0$  и в пределе плоского пространства-времени (при  $M/R \rightarrow 0$ ) совпадает с решениями, полученными в работе [16] (уравнения (B3) и (B4) указанной статьи).

### 2.3.3 Поле скоростей тороидальных осцилляций

Для расходящегося электромагнитного излучения  $m = m'$  и  $\ell = \ell', \ell' \pm 1$  (см., к примеру, Rose 1955). Для типичных осцилляционных мод с наименьшими порядковыми номерами выполняется условие  $\omega_R R \ll 1$  (см., [63]). В этом пределе, в качестве примера, можно вычислить электромагнитные поля, испускаемые осцилляционной модой  $\ell' = 1, m' = 0$  (F.36)–(F.38). В пределе плоского пространства-времени они совпадают с результатами [16].

Выражения для электромагнитных полей, излучаемых модой  $\ell' = 1, m' = 1$  приведены в Приложении E (F.40)–(F.45).

Для быстро растущих тороидальных мод с  $\ell' = m' = 2$  не исчезающие константы интегрирования имеют форму

$$v_{32} = \frac{i}{15\sqrt{21}} \frac{f_R \omega_R^4 R^5}{N_R} B_0 \eta_R \cos \chi, \quad u_{22} = \frac{i}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{f_R \omega_R^2 R^3}{N_R} B_0 \eta_R \cos \chi, \quad (2.38)$$

и следовательно генерируют очередные электромагнитные поля в волновой зоне (F.47)–(F.52)

## 2.4 Электромагнитное затухание осцилляций

Помимо затухания за счет гравитационного излучения, энергия тороидальных и сфероидальных осцилляций релятивистской намагниченной звезды может быть потрачена на электромагнитное излучение и возможное джоулево нагревание, возникающее за счет электрических осцилляционных токов внутри звезды в случае ее конечной проводимости.

### 2.4.1 Затухание за счет электромагнитного излучения от тороидальных осцилляций

Подставляя в формулу (Е.40) выражения для электромагнитного излучения, можно легко найти, что потери энергии осцилляций за счет электромагнитного излучения равны

$$L_{em} = \frac{1}{8\pi} \left( |u_{\ell m}|^2 + |v_{\ell m}|^2 \right), \quad (2.39)$$

и зависят от значения гравитационного параметра  $M/R$  на поверхности звезды, который входит в константы интегрирования  $u_{\ell m}$  и  $v_{\ell m}$ . Для примера, электромагнитная энергия, испускаемая тороидальной осцилляционной модой ( $\ell' = 1, m' = 0$ ) на сфере радиуса  $r$  равна

$$\begin{aligned} L_{(em)}(1, 0) &= \frac{c}{720\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2 B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^8 \cos^2 \chi = \\ &= \frac{c}{720\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2 \frac{1}{N_R^6} B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega R}{c} \right)^8 \cos^2 \chi. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Энергия электромагнитного излучения моды осцилляции  $\ell' = 1, m' = 1$  равна

$$\begin{aligned} L_{(em)}(1, 1) &= \frac{c}{16\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2 B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^4 \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{144} \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^4 \right] \cos^2 \chi. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Электромагнитные потери энергии за счет быстро растущей моды осцилляций ( $\ell' = 2, m' = 2$ ) равны

$$\begin{aligned} L_{(em)}(2, 2) &= \frac{c}{108\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2 B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^6 \times \\ &\times \left[ 1 + \frac{1}{350} \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^4 \right] \cos^2 \chi. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Для мод с низкими порядковыми номерами выполняется условие  $\omega_R R \ll 1$  [64], и в этом пределе можно найти следующее общее выражение для мощности  $L_{(em)}(\ell', m')$ , излучаемой произвольной модой тороидальных осцилляций

$(\ell', m')$  (при  $\ell' > 1$ )

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(\ell', m') &= \frac{c}{8\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2 B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^{2\ell'+2} \times \\
&\times \left[ \frac{m'^2}{(2\ell' - 1)(\ell' + 1)} + \frac{(\ell' + 1)^2 (\ell'^2 - m'^2)}{(\ell' - 1)(2\ell' + 1)} \right] \cos^2 \chi \times \\
&\times \frac{1}{\ell' (2\ell' - 1) [(2\ell' - 3)!!]^2}. \tag{2.43}
\end{aligned}$$

Коэффициенты, стоящие перед  $\times$  могут быть записаны как

$$\frac{c}{8\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2 B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega R}{c} \right)^{2\ell'+2} \left( \frac{1}{N_R^2} \right)^{\ell'}. \tag{2.44}$$

Можно оценить электромагнитную энергию, излучаемую тороидальными модами, используя типичные параметры НЗ  $B_0 \sim 10^{12}G$ ,  $R \sim 10^6 cm$  и период осцилляций  $T \sim 2.1 ms$ , а также тот факт, что из-за эффекта гравитационного красного смещения  $\omega_R N_R = \omega$ . Для дипольных ( $\ell' = 1$ ) мод мощность излучения для моды  $m' = 0$  равна

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(1, 0) &= \frac{c}{720\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R^4} \right)^2 B_0^2 R^{10} \left( \frac{2\pi}{cT} \right)^8 \approx 0.13 \times 10^{38} \\
&\left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R^4} \right)^2 \left( \frac{B_0}{10^{12}G} \right)^2 \left( \frac{R}{10^6 cm} \right)^{10} \left( \frac{2.1 ms}{T} \right)^8 \cos^2 \chi \text{ erg} \cdot s^{-1}, \tag{2.45}
\end{aligned}$$

где  $B_0 = 2\mu/R^3$  – значение интенсивности магнитного поля на поверхности звезды.

Для дипольных мод излучаемая мощность для  $m' = 1$  равна

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(1, 1) &= \frac{c}{16\pi} \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R^2} \right)^2 B_0^2 R^6 \left( \frac{2\pi}{cT} \right)^4 \times \left[ 1 + \frac{1}{144 N_R^4} R^4 \left( \frac{2\pi}{cT} \right)^4 \right] \\
&\approx 0.6 \times 10^{41} \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{f_R}{N_R^2} \right)^2 \left( \frac{B_0}{10^{12}G} \right)^2 \left( \frac{R}{10^6 cm} \right)^6 \left( \frac{2.1 ms}{T} \right)^4 \\
&\times \left[ 1 + \frac{10^{-4}}{144} N_R^{-4} \left( \frac{R}{10^6 cm} \right)^4 \left( \frac{2.1 ms}{T} \right)^4 \right] \cos^2 \chi \text{ ergs} \cdot s^{-1}. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Для периодов, соответствующих тороидальной моде  $\ell' = m' = 2$ , излучае-

мая мощность оценивается как

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(2, 2) &= \frac{c}{108\pi} \left(\frac{\eta_R}{\omega R}\right)^2 \left(\frac{f_R}{N_R^3}\right)^2 B_0^2 R^8 \left(\frac{2\pi}{cT}\right)^6 \times \left[1 + \frac{1}{350N_R^4} R^4 \left(\frac{2\pi}{cT}\right)^4\right] \\
&\approx 0.88 \times 10^{40} \left(\frac{\eta_R}{\omega R}\right)^2 \left(\frac{f_R}{N_R^3}\right)^2 \left(\frac{B_0}{10^{12}G}\right)^2 \left(\frac{R}{10^6cm}\right)^8 \left(\frac{2.1 ms}{T}\right)^6 \\
&\times \left[1 + \frac{10^{-4}}{350} N_R^{-4} \left(\frac{R}{10^6cm}\right)^4 \left(\frac{2.1 ms}{T}\right)^4\right] \cos^2 \chi \text{ ergs} \cdot s^{-1}. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

Произведенная оценка (2.45)–(2.47) показывает, что при учете гравитационного поля звезды ее электромагнитные потери энергии оказываются больше, чем потери энергии в ньютоновской модели и вклад ОТО усиливает электромагнитное затухание в  $\left(\frac{f_R}{N_R}\right)^2 N_R^{-2n}$  раз, где коэффициент  $n$  определяет тип тороидальных осцилляций и равен степени частоты в амплитуде электромагнитного излучения. Вклад релятивистских поправок в степень затухания осцилляций главным образом обусловлен i) усилением магнитного поля в искривленном пространстве-времени, пропорциональным параметру  $\left(\frac{f_R}{N_R}\right)^2$ , и ii) гравитационным красным смещением, которое обратно пропорционально некоторой степени поправочной функции  $N_R^{-2n}$ , определенной на поверхности звезды. Второй эффект более чувствителен к гравитационному полю, и, например, для стандартной НЗ с  $2M/R \approx 0.5$  для дипольного излучения ( $\ell' = 1, m' = 0$ ) последний множитель равен  $N_R^{-6} \approx 8$ . На основе полученных результатов можно сделать вывод, что эффекты ОТО являются чрезвычайно важными и обязательно должны быть учтены при определении степени затухания электромагнитного излучения звезды.

Далее, вычислим электромагнитную энергию, излучаемую тороидальными модами ( $\ell' = 70, m' = 0$ ) (см., к примеру, [65])

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(70, 0) &\approx 0.83 \times 10^{-320} \left(\frac{\eta_R}{\omega R}\right)^2 \left(\frac{f_R}{N_R}\right)^2 \left(\frac{B_0}{10^{12}G}\right)^2 \\
&\left(\frac{R}{10^6cm}\right)^{144} \left(\frac{2.1 ms}{T}\right)^{142} \cos^2 \chi \text{ ergs} \cdot s^{-1}. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Для типичной НЗ с  $N_R^2 = 0.65$  мощность электромагнитного излучения (2.48) в  $1.25 \times 10^{13}$  раз больше по сравнению с выражением для случая плос-

кого пространства-времени из-за эффекта гравитационного красного смещения, пропорционального  $N_R^{-140}$ . Однако, даже такое сильное релятивистское усиление не является заметным, потому что энергия (2.48) мала.

## 2.4.2 Затухание за счет электромагнитного излучения от сферoidalных осцилляций

Электромагнитная мощность излучения, испускаемого модой ( $\ell' = 1, m' = 0$ ) сферoidalных осцилляций на сфере радиуса  $r$ , равна

$$L_{(em)}(1, 0) = \frac{c}{180\pi} \left[ \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right) \frac{h_R}{N_R} + \left( \frac{\xi_R}{\omega_R R} \right) \frac{f_R}{N_R} \right]^2 \{B_0 R\}^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^6 \cos^2 \chi. \quad (2.49)$$

Электромагнитное излучение моды ( $\ell' = 2, m' = 2$ ) сферoidalных осцилляций равно

$$L_{(em)}(2, 2) = \frac{c}{4 \cdot 432\pi} \left\{ \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right)^2 \left( \frac{2h_R}{N_R} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{8}{175} \left[ \left( \frac{\xi_R}{\omega_R R} \right) \frac{3f_R}{N_R} - \left( \frac{\eta_R}{\omega_R R} \right) \frac{2h_R}{N_R} \right]^2 \right\} \{B_0 R\}^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^8 \cos^2 \chi. \quad (2.50)$$

В пределе  $\omega_R R \ll 1$  можно найти следующие общие выражения для мощности  $L_{(em)}(\ell', m')$ , испускаемой произвольной сферoidalной осцилляционной модой ( $\ell', m'$ ) (при  $\ell' > 2$ )

$$L_{(em)}(\ell', m') = \frac{c}{32\pi} \left[ \frac{2(\ell' + 1) f_R \xi_R - h_R \eta_R}{(\omega_R R) N_R} \right]^2 B_0^2 R^2 \left( \frac{\omega_R R}{c} \right)^{2\ell'} \times \\ \times \frac{(\ell' - 1)(\ell'^2 - m'^2)}{[(2\ell' - 3)!!]^2 \ell' (2\ell' + 1) (2\ell' - 1)} \cos^2 \chi. \quad (2.51)$$

В приближении Каулинга на поверхности звезды  $r = R$  имеется следующая связь между радиальными собственными функциями (ур. (14.13) в [61])

$$\eta_R = \xi_R \frac{\omega^2 R^3}{GM}. \quad (2.52)$$

Далее оценим электромагнитную энергию, испускаемую сферoidalными модами, используя значения некоторых параметров звезды из предыдущего

параграфа. Для дипольных ( $\ell' = 1$ ) мод, мощность излучения для  $m' = 0$  равна

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(1, 0) &= \frac{c}{180\pi} \left[ \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right) \frac{h_R}{N_R^3} + \left( \frac{\xi_R}{\omega R} \right) \frac{f_R}{N_R^3} \right]^2 B_0^2 R^8 \left( \frac{2\pi}{cT} \right)^6 \\
&\approx 0.53 \times 10^{38} \left[ \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right) \frac{h_R}{N_R^3} + \left( \frac{\xi_R}{\omega R} \right) \frac{f_R}{N_R^3} \right]^2 \\
&\left( \frac{B_0}{10^{12}G} \right)^2 \left( \frac{R}{10^6 cm} \right)^8 \left( \frac{2.1 ms}{T} \right)^6 \cos^2 \chi \text{ ergs} \cdot s^{-1}. \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Согласно соотношению (2.52) выражение (2.53) для потерь энергии может быть оценено как

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(1, 0) &\approx 0.53 \times 10^{38} \left( \frac{\xi_R}{\omega R} \right) \left[ \frac{\omega^2 R^3 h_R}{GM N_R^3} + \frac{f_R}{N_R^3} \right]^2 \\
&\left( \frac{B_0}{10^{12}G} \right)^2 \left( \frac{R}{10^6 cm} \right)^8 \left( \frac{2.1 ms}{T} \right)^6 \cos^2 \chi \text{ ergs} \cdot s^{-1}. \quad (2.54)
\end{aligned}$$

Отношение  $\left[ \frac{\omega^2 R^3 h_R}{GM N_R^3} + \frac{f_R}{N_R^3} \right]^2 \cdot \left[ \frac{\omega^2 R^3}{2GM} + 1 \right]^{-2}$  ответственно за релятивистское усиление потерь энергии.

Мощность электромагнитного излучения за счет осцилляционной моды ( $\ell' = 2, m' = 2$ ) оценивается как

$$\begin{aligned}
L_{(em)}(2, 2) &= \frac{c}{1728\pi} \left\{ \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{2h_R}{N_R^4} \right)^2 + \frac{8}{175} \left[ \left( \frac{\xi_R}{\omega R} \right) \frac{3f_R}{N_R^4} - \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right) \frac{2h_R}{N_R^4} \right]^2 \right\} \times \\
&\times B_0^2 R^{10} \left( \frac{2\pi}{cT} \right)^8 \approx 0.174 \times 10^{36} \left\{ \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right)^2 \left( \frac{2h_R}{N_R^4} \right)^2 + \frac{8}{175} \left[ \left( \frac{\xi_R}{\omega R} \right) \frac{3f_R}{N_R^4} - \right. \right. \\
&\left. \left. \left( \frac{\eta_R}{\omega R} \right) \frac{2h_R}{N_R^4} \right]^2 \right\} \left( \frac{B_0}{10^{12}G} \right)^2 \left( \frac{R}{10^6 cm} \right)^{10} \left( \frac{2.1 ms}{T} \right)^8 \cos^2 \chi \text{ ergs} \cdot s^{-1}. \quad (2.55)
\end{aligned}$$

В отличие от случая тороидальных осцилляций, электромагнитные потери энергии сфероидальных мод пропорциональны дополнительному параметру  $h_R/N_R$ , который ответственен за нерадиальные компоненты поверхностного магнитного поля. Электромагнитное излучение тороидальных осцилляций обусловлено только радиальной компонентой звездного магнитного поля тогда как сфероидальные осцилляции вносят возмущения во все компоненты магнитного поля звезды.

### 2.4.3 Затухание за счет джоулевого нагревания

В предыдущем параграфе было использовано предположение, что вещество внутри звезды имеет бесконечную проводимость ( $\sigma = \infty$ ). Но если предположить, что проводимость вещества звезды имеет конечное значение, то магнитные силовые линии уже не будут замороженными в звездное вещество и не будут двигаться вместе с ним. Небольшое движение звездного вещества по отношению к линиям магнитного поля генерирует электрический ток и омическая диссипация этих токов приводит к джоулевому нагреву, который является внутренним механизмом электромагнитного затухания звездных осцилляций.

Чтобы оценить джоулево нагревание, нужно получить для него релятивистское выражение. Согласно уравнениям Максвелла, в отсутствие источников тока тензор электромагнитного поля подчиняется уравнению первой пары (1.11) и второй паре (1.17) где точка с запятой означает ковариантную производную по отношению к метрике (1.2),  $\rho_e$  – плотность заряда и  $\mathbf{J}$  – *полный* электрический ток, дивергенция электромагнитного тензора энергии-импульса

$$T_{(em);\beta}^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left( F^{\alpha\sigma} F_{\sigma}^{\beta} - \frac{1}{4} g^{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right)_{;\beta} = F^{\sigma\alpha} J_{\sigma} . \quad (2.56)$$

Отметим, что полный электрический ток включает ток *проводимости*  $j^{\alpha}$ , который обусловлен электронами, имеющими электрическую проводимость  $\sigma$ , и закон Ома может быть записан как

$$j_{\alpha} = \sigma F_{\alpha\beta} w^{\beta} . \quad (2.57)$$

Умножая скалярно уравнение (2.56) на 4-скорость  $w_{\alpha}$  и используя закон Ома (2.57) можно получить изменение энергии электромагнитного поля (степень джоулевой диссипации) вдоль мировых линии проводящей среды как

$$Q_h = w_{\alpha} T_{(em);\beta}^{\alpha\beta} = w_{\alpha} F^{\sigma\alpha} J_{\sigma} = \frac{1}{\sigma} j^2 . \quad (2.58)$$

Так как не предполагается, что мода осцилляций обязательно направлена по магнитной оси НЗ, магнитное дипольное поле дается электрическим током

$j^\alpha \equiv (0, 0, j^\theta, j^\phi)$ , подчиняющимся соответствующим компонентам уравнений Максвелла (1.17)

$$J^\theta = \frac{c}{4\pi r \sin \theta} \left[ \partial_\phi B^r - e^{-(\Phi+\Lambda)} \sin \theta \partial_r (r e^\Phi B^\phi) \right], \quad (2.59)$$

$$J^\phi = \frac{c}{4\pi r} \left[ e^{-(\Phi+\Lambda)} \partial_r (e^\Phi r B^\theta) - \partial_\theta B^r \right], \quad (2.60)$$

где  $g_{00} = -e^{2\Phi}$  и  $g_{11} = e^{-2\Lambda}$  – компоненты метрического тензора, определяемые внутри звезды решением уравнений Эйнштейна.

Подставляя электрические токи (2.59) и (2.60) в (2.58) можно получить выражение для степени джоулевой диссипации:

$$Q_h = \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma r^2} \left\{ \frac{1}{\sin^2 \theta} \left[ \partial_\phi B^r - e^{-(\Phi+\Lambda)} \sin \theta \partial_r (r e^\Phi B^\phi) \right]^2 + \left[ e^{-(\Phi+\Lambda)} \partial_r (e^\Phi r B^\theta) - \partial_\theta B^r \right]^2 \right\}. \quad (2.61)$$

Разложение магнитного поля  $B^\alpha$  в ряд по параметру возмущения  $\eta/R$  ( $\eta/R \ll 1$ ) имеет следующий вид

$$B^\alpha = B_0^\alpha + \left( \frac{\eta}{R} \right) B_1^\alpha, \quad (2.62)$$

где  $B_0^\alpha$  – невозмущенное магнитное поле.

В таком случае формулы для джоулевого нагрева принимают вид

$$\begin{aligned} Q_h &= \frac{c^2 e^{-2\Lambda}}{16\pi^2 \sigma} \left[ \left( \frac{\eta}{R} \right)_{,r} \right]^2 \left[ (B_0^\theta)^2 + (B_0^\phi)^2 \right] = \\ &= (e^{-2\Lambda}) \left( \frac{\eta}{R} \right)^2 \frac{1}{4\pi} \left[ (B_0^\theta)^2 + (B_0^\phi)^2 \right] \frac{c^2}{4\pi \sigma R^2}, \end{aligned} \quad (2.63)$$

где уравнения Максвелла для невозмущенного магнитного поля

$$e^{-(\Phi+\Lambda)} \partial_r (e^\Phi r B_0^\theta) - \partial_\theta B_0^r = 0, \quad (2.64)$$

$$\partial_\phi B_0^r - e^{-(\Phi+\Lambda)} \sin \theta \partial_r (r e^\Phi B_0^\phi) = 0 \quad (2.65)$$

и было использовано предположение  $\partial_r \eta = \eta/R$  (см. [15]). Уравнение (2.63) указывает на то, что из-за появления метрической функции  $e^{-2\Lambda}$  степень

джоулевого нагревания с учетом поправок ОТО для магнитного поля звезды будет отличаться от нерелятивистского выражения.

Верхний предел джоулевой диссипации можно оценить, используя значения магнитного поля на поверхности звезды (так как ожидается, что звездные осцилляции имеют место в проводящей коре звезды)

$$L_J = \left(\frac{\eta}{R}\right)^2 \frac{B_0^2}{4\pi} (2h_R N_R^2)^2 \left(\frac{4\pi}{3} R^3\right) \frac{c^2}{4\pi\sigma R^2}. \quad (2.66)$$

Электромагнитное затухание мод осцилляций является функцией проводимости  $\sigma$ . Для типичной проводимости  $\sigma \sim 10^{22} \text{ s}^{-1}$  звездной коры можно оценить значение потери за счет электромагнитного нагревания

$$L_J \approx 0.23 \times 10^{28} \left(\frac{\eta}{R}\right)^2 (2h_R N_R^2)^2 \left(\frac{B_0}{10^{12} G}\right)^2 \left(\frac{R}{10^6 \text{ cm}}\right) \left(\frac{10^{22} \text{ s}^{-1}}{\sigma}\right) \text{ ergs} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (2.67)$$

Как и ожидалось, из-за высокой проводимости величина омических потерь энергии (2.67) для НЗ с типичными параметрами на несколько порядков меньше величины потерь энергии излучения (2.45)–(2.47) для дипольных и квадрупольных тороидальных мод и (2.53)–(2.55) для сфероидальных мод. Далее, релятивистский вклад в омические потери энергии (2.67) главным образом появляется из-за изменения магнитного поля звезды в  $2h_R$  раз. Результаты, представленные в уравнениях (2.67), (2.45)–(2.47) и (2.53)–(2.55), подтверждают существование сильного влияния гравитационного поля не только на мощность электромагнитного излучения тороидальных и сфероидальных мод, но и на джоулево нагревание в случае конечной проводимости. Однако, так как потери электромагнитной энергии за счет джоулевого нагревания не являются доминирующими для типичных НЗ, можно ожидать, что релятивистские эффекты не могут существенно изменить эволюцию НЗ и тогда потери электромагнитной энергии могли бы быть сравнимы или больше по сравнению с затуханием за счет гравитационной радиации из-за сильного влияния гравитационного поля на электромагнитные процессы на поверхности звезды.

В таблицах 3.1 и 3.1 приведены время затухания тороидальных и сфероидальных осцилляций для NS13T8 модели нейтронной звезды. Различные

столбцы соответствуют характеристикам моды колебаний, такие как частота и кинетическая энергия, мощность электромагнитного излучения, затухание гравитационных и электромагнитных колебаний в случаях ньютоновском и ОТО. В последнем столбце представлены отношение временные шкалы гравитационных и электромагнитных колебаний.

## 2.5 Выводы

В предыдущей главе был развит релятивистский формализм, описывающий вакуумную электродинамику осциллирующей намагниченной релятивистской звезды в рамках ОТО в предположении медленного движения, бесконечной электрической проводимости вещества внутри звезды, а также в релятивистском приближении, что электромагнитная энергия не вносит вклада в гравитационное поле. В данной главе подход, разработанный в первой главе, был применен к некоторым конкретным разновидностям звездных осцилляций, возмущающих дипольное магнитное поле, замороженное в проводящую кору звезды. Вычислены квазистационарные электромагнитные поля в ближней зоне и электромагнитные волны в волновой зоне, генерируемые типичными модами тороидальных и сфероидальных осцилляций намагниченной шварцшильдовской звезды. Показано, что решения для электромагнитных полей в ближней зоне испытывают существенное влияние гравитационного параметра  $M/r$ . Волновые решения формально совпадают с решениями в плоском пространстве-времени, однако константы интегрирования в данных решениях определяются граничными условиями на поверхности звезды, которые существенно влияют на параметры электромагнитных волн.

В ньютоновском пределе полученные выражения дают такие же формулы, как и в статьях [15] и [16]. Проведена оценка электромагнитных потерь энергии за счет некоторых мод сфероидальных и тороидальных осцилляций звезды, обладающей дипольным магнитным полем. При сравнении с ньютоновскими выражениями было показано, что потери энергии осциллирующей намагниченной звезды заметно усиливаются релятивистскими эффектами. Также рассмотрено затухание энергии осцилляций звезды за счет джоулевого нагрева в случае конечной проводимости звездного вещества и приведены некоторые грубые оценки омической диссипации электрических токов в случае, когда электрическая проводимость коры очень велика но, в то же время, конечна.

Наблюдаемые моды колебаний ( $n = 0, l = 2$ ) для тороидальных осцилля-

ций нейтронных звезд дают значения для частот 30 Гц и 28 Гц для ИМПГ SGR 1806-20 и SGR 1900+14, соответственно [14]. Однако вычисления в ньютоновской гравитации дают частоту 36.5 Гц [67]. Учет гравитационного красного смещения, произведенный в данных вычислениях для стандартной НЗ, приводит к частоте осцилляций 29.2 Гц, что находится в хорошем согласии с наблюдениями. С другой произведенные расчеты подтверждают, что ИМПГ SGR 1806-20 и SGR 1900+14 являются НЗ а не странными кварковыми звездами (В противном случае квазипериодические осцилляции наблюдались бы на более низких частотах за счет большего значения параметра компактности для странных звезд.).

Таблица 2.1: Время затухания тороидальных осцилляций для NS13T8 модели нейтронной звезды. Различные столбцы соответствуют характеристикам моды колебаний, такие как частота и кинетическая энергия, мощность электромагнитного излучения, затухание гравитационных и электромагнитных колебаний в случаях ньютоновском и ОТО. В последнем столбце представлены отношение временные шкалы гравитационных и электромагнитных колебаний.

Mode	$\nu$ (kHz) (McDermott et al. 1988) (1)	$\nu$ (kHz) GR (2)	$E_T$ (erg) (McDermott et al. 1988) (2)	$L_{\text{em}}^{\text{Newt}}$ (erg s $^{-1}$ ) (McDermott et al. 1988) (3)	$L_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (erg s $^{-1}$ ) (4)	$\tau_{\text{gw}}$ (s) (McDermott et al. 1988) (5)	$\tau_{\text{em}}^{\text{Newt}}$ (s) (McDermott et al. 1988) (6)	$\tau_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (s) (7)	$\tau_{\text{gw}} / \tau_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (8)	$\tau_{\text{em}}^{\text{Newt}} / \tau_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (9)
$1t_1$	17.9	14.32	$1.09 \times 10^{49}$	$1.77 \times 10^{43}$	$1.57 \times 10^{44}$	...	$1.23 \times 10^6$	$1.39 \times 10^5$	...	8.85
$1t_2$	30	24	$6.40 \times 10^{48}$	$1.44 \times 10^{44}$	$1.28 \times 10^{45}$	...	$8.88 \times 10^4$	$1.00 \times 10^4$	...	8.88
$1t_3$	43	34.4	$1.59 \times 10^{48}$	$5.98 \times 10^{44}$	$5.30 \times 10^{45}$	...	$5.32 \times 10^3$	$6.00 \times 10^2$	...	8.87
$1t_4$	52.7	42.16	$2.72 \times 10^{47}$	$1.33 \times 10^{45}$	$1.18 \times 10^{46}$	...	$4.08 \times 10^2$	$4.60 \times 10^1$	...	8.87
$2t_0$	0.36	0.288	$3.31 \times 10^{47}$	$6.86 \times 10^{32}$	$3.45 \times 10^{33}$	$6.62 \times 10^{11}$	$9.65 \times 10^{14}$	$1.92 \times 10^{14}$	$3.45 \times 10^{-3}$	5.03
$2t_1$	17.9	14.32	$3.26 \times 10^{49}$	$9.32 \times 10^{42}$	$4.96 \times 10^{43}$	$7.60 \times 10^5$	$7.00 \times 10^6$	$1.31 \times 10^6$	0.58	5.34
$2t_2$	30	24	$1.92 \times 10^{49}$	$2.17 \times 10^{44}$	$1.15 \times 10^{45}$	$2.33 \times 10^5$	$1.77 \times 10^5$	$3.33 \times 10^4$	70	5.32
$2t_3$	43	34.4	$4.76 \times 10^{48}$	$1.83 \times 10^{45}$	$9.72 \times 10^{45}$	$1.51 \times 10^4$	$5.21 \times 10^3$	$9.79 \times 10^2$	15.43	5.32
$2t_4$	52	41.6	$8.15 \times 10^{47}$	$6.10 \times 10^{45}$	$3.24 \times 10^{46}$	$4.68 \times 10^3$	$2.67 \times 10^2$	$5.03 \times 10^1$	93.04	5.31

Таблица 2.2: Время затухания сферических осцилляций для NS13TG8 модели нейтронной звезды. Различные столбцы соответствуют характеристикам моды колебаний, такие как частота и кинетическая энергия, мощность электромагнитного излучения, затухание гравитационных и электромагнитных колебаний в случаях ньютоновском и ОТО. В последнем столбце представлены отношение временные шкалы гравитационных и электромагнитных колебаний. Здесь индексом "S" обозначен поверхностная мода колебаний  $g$ .

Mode	$\nu$ (kHz) (McDermott et al. 1988) (1)	$\nu$ (kHz) GR	$E_T$ (erg) (McDermott et al. 1988) (2)	$L_{\text{em}}^{\text{Newt}}$ (erg s $^{-1}$ ) (McDermott et al. 1988) (3)	$L_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (erg s $^{-1}$ ) (4)	$\tau_{\text{gw}}$ (s) (McDermott et al. 1988) (5)	$\tau_{\text{em}}^{\text{Newt}}$ (s) (McDermott et al. 1988) (6)	$\tau_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (s) (7)	$\tau_{\text{gw}}/\tau_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (8)	$\tau_{\text{em}}^{\text{Newt}}/\tau_{\text{em}}^{\text{GR}}$ (9)
$2p_2$	104.72	83.8	$1.55 \times 10^{50}$	$9.04 \times 10^{44}$	$4.56 \times 10^{45}$	$0.23 \times 10^{-3}$	$3.43 \times 10^5$	$6.79 \times 10^4$	$0.34 \times 10^{-6}$	4.4
$2f$	28.56	22.85	$1.59 \times 10^{52}$	$2.38 \times 10^{43}$	$7.41 \times 10^{44}$	$7.50 \times 10^{-3}$	$1.34 \times 10^9$	$4.29 \times 10^7$	$1.75 \times 10^{-10}$	31.24
$2s_2$	14.61	11.69	$2.53 \times 10^{53}$	$4.46 \times 10^{43}$	$1.03 \times 10^{45}$	$1 \times 10^4$	$1.13 \times 10^{10}$	$4.90 \times 10^8$	$0.2 \times 10^{-4}$	23.06
$2s_1$	8.6	70.88	$1.32 \times 10^{54}$	$5.13 \times 10^{43}$	$1.12 \times 10^{45}$	$4.32 \times 10^4$	$5.15 \times 10^{10}$	$2.36 \times 10^9$	$1.83 \times 10^{-5}$	21.82
$2i_2$	0.63	0.5	$4.08 \times 10^{47}$	$5.49 \times 10^{43}$	$1.16 \times 10^{45}$	$5.04 \times 10^9$	$1.48 \times 10^4$	$7.01 \times 10^2$	$0.72 \times 10^7$	21.11
$2i_1$	0.35	0.28	$1.63 \times 10^{53}$	$5.49 \times 10^{43}$	$1.16 \times 10^{45}$	$8.64 \times 10^5$	$5.93 \times 10^9$	$2.80 \times 10^8$	$3.1 \times 10^{-3}$	21.18
$2g_2^s$	0.12	0.096	$5.49 \times 10^{43}$	$5.49 \times 10^{43}$	$1.16 \times 10^{45}$	$7.57 \times 10^{16}$	$5.24 \times 10^{-3}$	$2.47 \times 10^{-4}$	$3.1 \times 10^{20}$	21.21
$2g_3^s$	0.1	0.08	$1.96 \times 10^{40}$	$5.49 \times 10^{43}$	$1.16 \times 10^{45}$	$1.17 \times 10^{17}$	$0.71 \times 10^{-3}$	$0.34 \times 10^{-4}$	$3.4 \times 10^{21}$	20.88

# ГЛАВА 3. Эффекты квантовой интерференции в пространстве-времени медленно вращающегося намагниченного компактного объекта в модели мира на бранах

## 3.1 Введение

Идея о том, что наша Вселенная представляет собой 3-брану, вложенную в пространство-время большей размерности [23], с недавних пор привлекла широкое внимание. В рамках стандартной ОТО пространство-время в окрестности сферически симметричного объекта единственным образом описывается метрикой Шварцшильда. В модели пятимерной Вселенной на бранах, за счет высокоэнергетических поправок к плотности энергии, а также поправок к напряжению Вейля, связанных с массивными гравитонами, внешнее пространство время статичной звезды больше не может описываться метрикой Шварцшильда.

Статическое сферически симметричное внешнее вакуумное решение для пространства времени в модели мира на бранах было впервые предложено в работах [69, 70] и имеет математическую форму решения Райсснера-Нордстрема, при том что приливной заряд Вейля  $Q^*$  в метрике на бранах соответствует квадрату электрического заряда в данном решении. Так называемое решение ДМНР было получено после наложения условия нулевой энер-

гии 3-браны при условии ненулевой кривизны Вейля общего пространства-времени.

В последнее время была широко исследована роль приливного заряда в орбитальной резонансной модели квазипериодических осцилляций в двойных системах ЧД [71] и НЗ [72]. Движение пробных частиц в окрестности ЧД, помещенной в однородное магнитное поле в модели мира на бранах, и влияние бран параметра на радиус внутренней стабильной круговой орбиты было исследовано в работе [73].

Эксперимент, целью которого являлось исследование влияния гравитационного поля Земли на сдвиг фазы частицы в нейтронном интерферометре, был впервые предложен в работе [19]. В дальнейшем этот эксперимент был успешно выполнен в работе [20]. После этого были найдены также и другие причины, способные оказывать влияние на сдвиг фаз интерферирующих частиц. Среди них эффект, связанный с вращением Земли [74, 75], который является квантовомеханическим аналогом эффекта Саньяка, а также эффект Лензе-Тирринга [76], возникающий в ОТО за счет увлечения инерциальных систем отсчета. В данной главе не рассматривается влияние на сдвиг фазы спина интерферирующих частиц, так как предполагается, что он мал. Обзор моделей Некоторые космологические и астрофизические приложения теорий бранмира могут быть найдены в работах [77]–[81].

В работе [82] был предложен общий формализм исследования фазовых сдвигов частиц в нейтронном интерферометре, связанных с различными явлениями. В данной главе этот формализм применяется для стационарного гравитационного поля в рамках общерелятивистской модели мира на бранах с целью получения поправки к сдвигу фазы интерферирующих частиц, связанной с возможным существованием приливного заряда.

Эффект Саньяка является хорошо известным и подробно изученным эффектом (см., к примеру [83]). Он выражает тот факт, что между лучами света либо пучками частиц, распространяющимися в противоположных направлениях вдоль замкнутого пути вокруг вращающегося интерферометра, возникает разность фаз  $\Delta\phi$ . Эта разность фаз может быть объяснена тем,

что пучки, распространяющиеся в противоположных направлениях, затрачивают разные отрезки времени на прохождение замкнутого пути. Выражение для разности времен прохождения  $\Delta T$  двух пучков, как будет показано ниже, не включает в себя ни массы ни энергии частиц. Таким образом, мы можем рассматривать эффект Саньяка как "универсальный" эффект, присущий самой геометрии пространства-времени вне зависимости от физической природы интерферирующих пучков. В данной главе результаты, полученные ранее в работах [84, 85], где эффект Саньяка рассматривался по аналогии с эффектом Ааронова-Бома, обобщены на случай медленно вращающегося пространства-времени на бранах.

Глава организована следующим образом. В параграфе 3.2, начиная с рассмотрения ковариантного уравнения Клейна-Гордона, получены выражения для различных слагаемых сдвига фазы волновой функции интерферирующих частиц. В недавних экспериментах Гранита было подтверждено влияние гравитационного поля Земли на квантование энергетических уровней ультрахолодных нейтронов. В ближайшее время в данном направлении планируется проведение новых, еще более точных экспериментов. Эксперименты с использованием ультрахолодных нейтронов имеют очень высокую точность и в связи с этим имеет смысл попытка проверки с помощью этих экспериментов гравитационных эффектов ОТО. В качестве примера в данной главе исследуются модификации энергетических уровней ультрахолодных нейтронов, вызванные присутствием бран параметра. В параграфе 3.3 рассматриваются квантовые эффекты в интерферометре Маха-Зендера на фоне пространства-времени ЧД в модели мира на бранах. Параграф 3.4 посвящен исследованию эффекта Саньяка в пространстве-времени медленно вращающегося объекта, обладающего ненулевым бран параметром.

## 3.2 Фазовый сдвиг

Предположим, что внешнее гравитационное поле медленно вращающегося объекта в модели мира на бранах в сферической системе координат описы-

вается метрикой

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + H dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\tilde{\omega}(r)r^2 \sin^2 \theta dt d\phi, \quad (3.1)$$

где

$$N^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2}\right) = H^{-2} \quad (3.2)$$

представляет собой точное решение типа Рейсснера-Нордстрема [69] для внешней метрики гравитирующего объекта,  $\tilde{\omega} = \omega(1 - Q^*/2rM) = 2Ma/r^3(1 - Q^*/2rM)$ ,  $Q^*$  – приливной заряд,  $M$  – общая масса,  $a$  – угловой момент объекта на единицу массы.

Далее используем уравнение Клейна-Гордона

$$\nabla^\mu \nabla_\mu \Phi - (mc/\hbar)^2 \Phi = 0 \quad (3.3)$$

для частиц с массой  $m$ , и определим волновую функцию интерферирующих частиц в виде [82]

$$\Phi = \Psi \exp\left(-i\frac{mc^2}{\hbar}t\right), \quad (3.4)$$

где  $\Psi$  – нерелятивистская волновая функция.

В данном случае оба параметра  $GM/rc^2$  и  $a/r$  являются достаточно малыми и членами высших порядков по ним можно пренебречь. Таким образом, в первом порядке по  $M$  и  $Q^*$ , пренебрегая членами порядка  $O((v/c)^2)$ , уравнение Клейна-Гордона в модели мира на бранах может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = & -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2 \hbar^2} \right] \Psi - \frac{GMm}{r} \Psi + \frac{Q^* mc^2}{2r^2} \Psi \\ & + \frac{2GMa}{r^3 c} \left(1 - \frac{Q^*}{r^2} - \frac{Q^* c^2}{2rMG}\right) L_z \Psi, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где использованы обозначения

$$L^2 = -\hbar^2 \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right], \quad (3.6)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (3.7)$$

соответствующие квадрату оператора полного орбитального углового момента частицы и его  $z$ -компоненте по отношению к центру объекта соответственно. Используя преобразование координат  $\varphi \rightarrow \varphi + \Omega t$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения объекта, можно получить уравнение Шредингера для наблюдателя, неподвижного по отношению к поверхности объекта, в следующем виде:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{L^2}{r^2 \hbar^2} \right] \Psi - \frac{GMm}{r} \Psi + \frac{Q^* mc^2}{2r^2} \Psi - \Omega L_z \Psi + \frac{2GMa}{r^3 c} L_z \Psi - \frac{GQ^* ac}{r^4} \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) L_z \Psi. \quad (3.8)$$

Гамильтониан, входящий в состав уравнения (3.8), может быть представлен в виде суммы пяти слагаемых

$$H = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4, \quad (3.9)$$

где

$$H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{L^2}{2mr^2}, \quad H_1 = -\frac{GMm}{r} + \frac{Q^* mc^2}{2r^2}, \\ H_2 = -\Omega L_z, \quad H_3 = \frac{2GMa}{r^3 c} L_z, \quad H_4 = -\frac{Q^* ac}{r^4} \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) L_z. \quad (3.10)$$

$H_0$  соответствует Гамильтониану свободной частицы,  $H_1$  – ньютоновской потенциальной энергии гравитационного поля,  $H_2$  связан с вращением гравитирующего объекта,  $H_3$  связан с эффектом Лензе-Тирринга (увлечением инерциальных систем отсчета). Смещения фазы, соответствующие слагаемым Гамильтониана  $H_1$  и  $H_2$ , равны

$$\beta_{Sag} \simeq \frac{2m\Omega \cdot \mathbf{S}}{\hbar}, \quad \beta_{drag} \simeq \frac{2Gm}{\hbar c^2 R^3} \mathbf{J} \cdot \left[ \mathbf{S} - 3 \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{S} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \right] \quad (3.11)$$

соответственно. Вычислим сдвиг фазы, связанный с гравитационным потенциалом. В рассматриваемом случае применимо квазиклассическое приближение и полный сдвиг фазы частицы за счет гравитационного потенциала находится интегрированием вдоль классической траектории:

$$\beta_{grav} = \beta_{ABD} - \beta_{ACD} = -\frac{1}{\hbar} \int \left( -\frac{GMm}{r} + \frac{Q^* mc^2}{2r^2} \right) dr \\ \simeq \left[ \frac{m^2 S \lambda g}{2\pi \hbar^2} - \frac{m^2 S \lambda}{2\pi \hbar^2} \cdot \frac{Q^* c^2}{R^3} \right] = \beta \pm \Delta \beta. \quad (3.12)$$

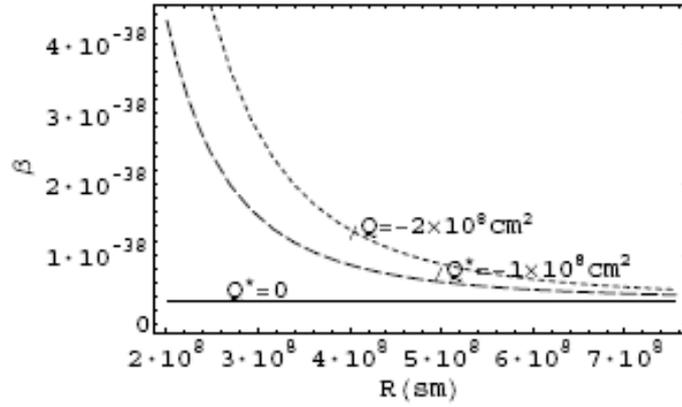


Рис. 3.1: Фазовый сдвиг за счет гравитации массивного объекта для различных параметров бран параметра  $Q^*$

Здесь  $S = d_1 d_2$  – площадь интерферометра,  $\mathbf{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  и  $\mathbf{J} = (0, 0, J)$  – векторы угловой скорости и углового момента объекта соответственно,  $R$  – радиус-вектор, определяющий местоположение интерферометра по отношению к центру гравитирующего объекта,  $\lambda$  – длина волны де Бройля. На Рис. 3.1. показана зависимость сдвига фазы (за счет гравитационного поля) от радиуса при разных значениях  $Q^*$ .

Как известно из эксперимента [20], смещение фазы частицы за счет гравитационного потенциала Земли находится в хорошем согласии с теоретически предсказанным значением, так что ошибка составляет порядка 1%. Следовательно, отсюда можно легко получить следующий верхний предел на абсолютное значение приливного заряда

$$Q^* \leq 10^7 \text{ cm}^2. \quad (3.13)$$

Последний член уравнения (3.10) представляет собой часть  $H_4$  Гамильтониана

$$H_4 = -\frac{Q^* ac}{r^4} \left( 1 + \frac{2GM}{c^2 r} \right) L_z, \quad (3.14)$$

связанную с бран параметром  $Q^*$ .

Интегрируя его по времени вдоль траектории частицы, можно найти сле-

дующие поправки к сдвигу фазы

$$\beta_4 = -\frac{1}{\hbar} \int \frac{2GMQ^*a}{r^5 c} L_z dt, \quad \beta_5 = -\frac{1}{\hbar} \int \frac{Q^*ac}{r^4} L_z dt. \quad (3.15)$$

Вводя вектор  $\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}'$ , где  $\mathbf{r}'$  определяет положение заданной точки интерферометра относительно его центра, а также предполагая, что отношение  $r'/R$  мало, можно получить выражения

$$\begin{aligned} \beta_{brane} &= \beta_{4(ABD)} - \beta_{4(ACD)} = \frac{2GQ^*m}{\hbar c^2} \oint \frac{\mathbf{J} \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})}{r^5} \\ &= \frac{2GQ^*m}{\hbar c^2} \mathbf{J} \cdot \oint \frac{(\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'|^5} \simeq -\frac{2GQ^*m}{\hbar c^2 R^5} \mathbf{J} \cdot \left[ \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right. \\ &\quad \left. - 5 \oint \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{r}' \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \times d\mathbf{r}' \right] = -\frac{2GQ^*m}{\hbar c^2 R^5} \mathbf{J} \left[ \mathbf{S} - 5 \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{S} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

и

$$\begin{aligned} \beta'_{brane} &= \beta_{5(ABD)} - \beta_{5(ACD)} = \frac{Q^*m}{\hbar M} \oint \frac{\mathbf{J} \cdot (\mathbf{r} \times d\mathbf{r})}{r^4} \\ &= \frac{Q^*m}{\hbar M} \mathbf{J} \cdot \oint \frac{(\mathbf{R} + \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}'}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}'|^4} \simeq -\frac{Q^*m}{\hbar M R^4} \mathbf{J} \cdot \left[ \oint \mathbf{r}' \times d\mathbf{r}' \right. \\ &\quad \left. - 4 \oint \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{r}' \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \times d\mathbf{r}' \right] = -\frac{Q^*m}{\hbar M R^4} \mathbf{J} \left[ \mathbf{S} - 4 \left( \frac{\mathbf{R}}{R} \cdot \mathbf{S} \right) \frac{\mathbf{R}}{R} \right] \end{aligned} \quad (3.17)$$

Если предположить, что гравитирующий объект представляет собой сферу радиуса  $R$  с постоянной плотностью, то его момент инерции имеет вид

$$\mathbf{J} = \frac{2}{5} M R^2 \boldsymbol{\Omega}, \quad (3.18)$$

и если далее предположить что  $\mathbf{R}$  перпендикулярно  $\mathbf{S}$ , то

$$\beta_{brane} = -\frac{1}{5} \frac{r_g Q^*}{R^3} \beta_{Sag}, \quad \beta'_{brane} = -\frac{1}{5} \frac{Q^*}{R^2} \beta_{Sag}, \quad (3.19)$$

а в случае, если  $\mathbf{R}$  параллельно  $\mathbf{S}$ , то

$$\beta_{brane} = \frac{4}{5} \frac{r_g Q^*}{R^3} \beta_{Sag}, \quad \beta'_{brane} = \frac{3}{5} \frac{Q^*}{R^2} \beta_{Sag}. \quad (3.20)$$

Зависимость сдвига фазы, полученного в уравнении (3.19), от радиуса представлена на рисунке 3.2 для различных значений бран параметра.

С точки зрения астрофизики интересной является задача применения полученного Гамильтониана частицы, движущейся в окрестности вращающегося гравитирующего объекта в модели мира на бранах, к вычислению энергетических уровней ультрахолодных нейтронов (как это было сделано для

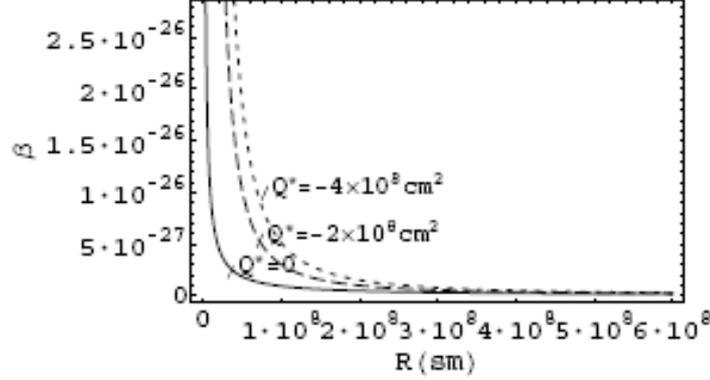


Рис. 3.2: Фазовый сдвиг за счет эффекта увлечения инерциальных систем отсчета для различных значений параметра  $Q^*$ .

медленно вращающегося пространства-времени Керра в работе [86] и для медленно вращающегося пространства-времени с ненулевым гравитомагнитным зарядом в работе [87]). В одной из последних работ [86] было исследовано влияние возмущений углового момента в Гамильтониане  $H_2 = \Omega L_z$  на энергетические уровни ультрахолодных нейтронов. В данной главе приведено обобщение этого исследования на случай гравитирующего объекта (в частности, Земли) в рамках модели мира на бранах. Обозначим за  $\psi$  невозмущенное нерелятивистское стационарное состояние биспинора (описывающего ультрахолодный нейтрон) в поле медленно вращающегося гравитирующего объекта на бранах. Тогда можно записать

$$H_4\psi = i\hbar \frac{Q^*ac}{r^4} \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = i\hbar \frac{Q^*ac \sin\theta}{r^3} \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) \nabla\psi \cdot e_\varphi, \quad (3.21)$$

где

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}e_\theta + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}e_\varphi. \quad (3.22)$$

есть оператор Лапласа в сферических координатах. Вводя декартовы координаты  $x, y, z$  с  $e_x \equiv e_\varphi$  и осью  $z$ , направленной вертикально вверх, а также предполагая, что стационарное состояние нейтрона имеет форму

$$\varphi(x) = \varphi_v(z)e^{i(k_1x+k_2y)}, \quad (3.23)$$

можно легко получить из уравнения (3.21)

$$\begin{aligned} H_4\psi &= i\hbar \frac{Q^*ac \sin \theta}{r^3} \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\hbar k_1 \frac{Q^*ac \sin \theta}{r^3} \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) \psi \\ &= -mu_1 \frac{Q^*ac \sin \theta}{r^3} \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) \psi, \end{aligned} \quad (3.24)$$

где приняты следующие обозначения

$$u_1 \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_\varphi, \quad \mathbf{u} \equiv \frac{\hbar}{m}(k_1\mathbf{e}_x + k_2\mathbf{e}_y). \quad (3.25)$$

Следуя рассуждениям работ [86] и [87], можно получить возмущения первого порядка, связанные с присутствием бран параметра, на уровни энергии ультрахолодных нейтронов в следующем виде

$$(\delta E)_{brane} \simeq \langle \psi | H_4 \psi \rangle = -mu_1 \int \frac{Q^*ac \sin \theta}{r^3} \left(1 + \frac{2GM}{c^2r}\right) |\psi|^2 dV. \quad (3.26)$$

Предположим, что  $r = (R + z) \cos \chi$  (где  $\chi$  – широта) и возьмем  $\sin \theta = 1$ , так что  $\theta = \pi/2$ . Предполагая также  $z \ll R$ , можно представить уравнение (3.26) в виде суммы  $(\delta E)_{brane} = (\delta E')_{brane} + (\delta E'')_{brane}$  и получить выражения для слагаемых

$$(\delta E')_{brane} \simeq \langle \psi | H_4 \psi \rangle = -mu_1 \frac{Q^*ac}{R^3 \cos^3 \chi} + mu_1 \frac{3Q^*ac}{R^4 \cos^3 \chi} \int z |\psi|^2 dV, \quad (3.27)$$

и

$$(\delta E'')_{brane} \simeq \langle \psi | H_4 \psi \rangle = -mu_1 \frac{2GMQ^*a}{R^4 c \cos^4 \chi} + mu_1 \frac{8GMQ^*a}{R^5 c \cos^4 \chi} \int z |\psi|^2 dV. \quad (3.28)$$

Далее заметим, что  $\int z |\psi|^2 dV$  представляет собой среднее значение  $\langle z \rangle_n$  величины  $z$  для стационарного состояния  $\varphi = \varphi_n$ . В дальнейших рассуждениях использовано выражение для  $\langle z \rangle_n$  из [86]

$$\langle z \rangle_n = \frac{2 E_n}{3 mg}. \quad (3.29)$$

Теперь можно легко получить модификации энергетических уровней  $E_n$  ультрахолодных нейтронов, связанные с присутствием приливного заряда в метрике, как

$$\frac{(\delta E')_{brane}}{E_n} \simeq \frac{2u_1 Q^*ac}{R^4 g \cos^3 \chi}, \quad \frac{(\delta E'')_{brane}}{E_n} \simeq \frac{16 GMQ^*u_1 a}{3 R^5 g \cos^4 \chi} = \frac{16}{3} \frac{Q^*u_1 a}{R^3 \cos^4 \chi}. \quad (3.30)$$

Численно оценим полученные поправки, используя следующие параметры для Земли:  $u_1 \simeq +10/$ ,  $Q^* \sim 10^{92}$ ,  $\cos \chi \simeq 0.71$ ,  $a \simeq 3.97$ ,  $g \simeq 10/2$  и  $R \simeq 6.4 \cdot 10^8$ ,  $c \simeq 3 \cdot 10^{10}/$ , в результате чего получим предел

$$\frac{(\delta E')_{brane}}{E_n} \simeq 4 \times 10^{-11} . \quad (3.31)$$

На поверхности Земли можно пренебречь членом  $(\delta E'')_{brane}$ . Из полученного результата (3.31) видно, что влияние бран параметра будет существенно в области компактных гравитирующих объектов с малым  $R$ .

### 3.3 Интерференция в интерферометре типа Маха-Зендера

Пространство-время в окрестности вращающейся ЧД в модели мира на бранах в координатах  $(t, r, \theta, \varphi)$  принимает следующий вид (см. к примеру [88])

$$ds^2 = -\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma} dt^2 + \frac{(\Sigma + a^2 \sin^2 \theta)^2 - \Delta a^2}{\Sigma} \sin^2 \theta d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 - 2 \frac{\Sigma + a^2 \sin^2 \theta - \Delta}{\Sigma} a \sin^2 \theta d\varphi dt , \quad (3.32)$$

где  $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ ,  $\Delta = r^2 + a^2 - 2Mr + Q^*$  и параметр  $a$  связан с угловым моментом ЧД.

Компоненты тетрады стационарного наблюдателя в пространстве-времени, описываемом метрикой (3.32), имеют вид

$$\mathbf{e}_{\hat{t}}^\mu = H(1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{t}} = -N \left( 1, 0, 0, \frac{2Mr - Q^*}{r^2} \right) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{r}}^\mu = N(0, 1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{r}} = H(0, 1, 0, 0) \quad (3.34)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\theta}}^\mu = \frac{1}{r}(0, 0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{\theta}} = r(0, 0, 1, 0) \quad (3.35)$$

$$\mathbf{e}_{\hat{\varphi}}^\mu = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{Q^* - 2Mr}{r \sqrt{r^2 - 2Mr + Q^*}}, 0, 0, 1 \right), \quad \mathbf{e}_{\hat{\mu}}^{\hat{\varphi}} = r \sin \theta (0, 0, 1, 1) , \quad (3.36)$$

а ускорение вдоль траекторий Киллинга равно (см. [89])

$$a_\mu = \frac{1}{2} \partial_\mu \ln(-g_{00}) , \quad (3.37)$$

так что для ненулевой компоненты ускорения можно получить выражение

$$a_{\hat{r}} = \frac{1}{r} \left( \frac{M}{r} - \frac{Q^*}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.38)$$

Неисчезающие ортонормальные компоненты (обозначенные шляпками) тензора вращения стационарной конгруэнции  $\chi_{\mu\nu}$  в медленно вращающемся пространстве-времени на бранах принимают вид

$$\chi_{\hat{r}\hat{\varphi}} = \frac{a \sin \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2} \right)^{-1} \left( \frac{M}{r} - \frac{Q^*}{r^2} \right), \quad (3.39)$$

$$\chi_{\hat{\theta}\hat{\varphi}} = \frac{a \cos \theta}{r^2} \left( 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \left( \frac{Q^*}{r^2} - \frac{2M}{r} \right). \quad (3.40)$$

Простейшая форма векторного потенциала электромагнитного поля  $\mathcal{A}_\mu$  при условии лоренцевой калибровки в пространстве-времени (3.1) записывается как  $\mathcal{A}_\mu^\alpha = C_1 \xi_t^\alpha + C_2 \xi_\varphi^\alpha$  (см. [90]). Одна из констант интегрирования в данном выражении равна  $C_2 = B/2$  при условии, что гравитационный источник помещен в однородное магнитное поле  $\mathbf{B}$ , параллельное оси вращения (свойства ЧД, помещенной в постоянное магнитное поле, подробно исследованы в работах [91, 92]), а другая константа интегрирования  $C_1 = aB$  может быть найдена из асимптотического поведения пространства-времени (3.1) на бесконечности, так что

$$\mathcal{A}_t = -aB \left[ 1 - \left( \frac{2M}{r} - \frac{Q^*}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \right], \quad (3.41)$$

$$\mathcal{A}_\varphi = \frac{Br^2}{2} \sin^2 \theta. \quad (3.42)$$

Полная энергия частицы в приближении слабого поля может быть записана в следующей форме

$$\mathcal{E} = p(\xi) + \mathcal{E}_{pot} = p(\xi) + e_p \mathcal{A}_t, \quad (3.43)$$

где  $e_p$  – электрический заряд частицы. Она может быть интерпретирована как полная сохраняющаяся энергия, сложенная из модифицированной кинетической энергии и энергии покоя  $p(\xi)$ , а также модифицированной электростатической энергии  $e_p \mathcal{A}_t$ . Для дальнейших вычислений введем измеряемые

компоненты электромагнитного поля, равные  $E_\alpha = F_{\alpha\beta}u^\beta$  для электрического и  $B_\alpha = (1/2)\eta_{\alpha\beta\mu\nu}F^{\beta\mu}u^\nu$  для магнитного поля, где  $F_{\alpha\beta} = \mathcal{A}_{\beta,\alpha} - \mathcal{A}_{\alpha,\beta}$  – тензор электромагнитного поля,  $\eta_{\alpha\beta\mu\nu} = \sqrt{-g}\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$  – псевдотензорное выражение для символа Леви-Чивита  $\epsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$ ,  $g \equiv \det|g_{\alpha\beta}|$ . При этом ортонормальные компоненты поля принимают вид

$$B_{\hat{r}} = -\frac{B}{2}, \quad B_{\hat{\theta}} = -\frac{B \sin \theta}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.44)$$

$$E_{\hat{r}} = \frac{aB}{r} \left[2 \left(\frac{Q^*}{r^2} - \frac{M}{r}\right) + \sin^2 \theta \left(\frac{3M}{r} - \frac{2Q^*}{r^2}\right)\right], \quad E_{\hat{\theta}} = 0. \quad (3.45)$$

Теперь можно получить выражение для полного смещения фазы [89] в следующем виде

$$\begin{aligned} \Delta\phi = \mathcal{E}\Sigma & \left[ -\frac{\mathcal{E}}{p_0}(\cos \beta a_{\hat{r}} - \cos \gamma \sin \beta a_{\hat{\theta}} - \sin \gamma \sin \beta a_{\hat{\phi}}) \right. \\ & -\frac{1}{p_0}(\cos \beta \partial_{\hat{r}} \mathcal{E}_{pot} - \cos \gamma \sin \beta \partial_{\hat{\theta}} \mathcal{E}_{pot} - \sin \gamma \sin \beta \partial_{\hat{\phi}} \mathcal{E}_{pot}) \\ & \left. + \sin \beta \chi_{\hat{\theta}\hat{\phi}} + \cos \gamma \cos \beta \chi_{\hat{\phi}\hat{r}} + \sin \gamma \cos \beta \chi_{\hat{r}\hat{\theta}} \right] \\ & + e_p \Sigma (\sin \beta B_{\hat{r}} + \cos \gamma \cos \beta B_{\hat{\theta}} + \sin \gamma \cos \beta B_{\hat{\phi}}), \quad (3.46) \end{aligned}$$

где  $\partial_{\hat{\mu}} = e_{\hat{\mu}}^\nu \partial_\nu$ ,  $S$  – площадь интерферометра,  $\gamma$  – угол, который составляет линия базы по отношению к  $e_{\hat{\phi}}$ , а  $\beta$  – угол наклона. Независимо варьируя углы  $\beta$  и  $\gamma$ , можно получить из измерений сдвига фазы следующие комбинации членов:

$$\Delta\phi(\beta = 0, \gamma = 0) = \frac{\Sigma\Lambda\mathcal{L}}{p_0 r \mathcal{W}^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{ap_0}{\mathcal{W}^{\frac{1}{2}}} - \Lambda + e_p a B\right) - \frac{1}{2} e_p B \Sigma \sin \theta \mathcal{W}, \quad (3.47)$$

$$\Delta\phi\left(\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = \frac{\pi}{2}\right) = -\Lambda \frac{\Sigma a \mathcal{K} \mathcal{L}}{r^2 \mathcal{W}^{\frac{1}{2}}} \cos \theta - \frac{e_p B}{2}, \quad (3.48)$$

$$\Delta\phi\left(\beta = \frac{\pi}{2}, \gamma = 0\right) = -\Lambda \frac{\Sigma a \mathcal{K} \mathcal{L}}{r^2 \mathcal{W}^{\frac{1}{2}}} \cos \theta - \frac{e_p B}{2}, \quad (3.49)$$

$$\Delta\phi\left(\beta = 0, \gamma = \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\Sigma\Lambda}{p_0 r \mathcal{W}^{\frac{1}{2}}} (e_p a B - \Lambda), \quad (3.50)$$

где

$$\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2}\right) = \mathcal{W}, \quad \left(\frac{2M}{r} - \frac{Q^*}{r^2}\right) = \mathcal{K}, \quad (3.51)$$

$$\left(\frac{M}{r} - \frac{Q^*}{r^2}\right) = \mathcal{L}, \quad \Lambda = \{p(\xi) + e_p a B [1 - \mathcal{K}(1 - \sin^2 \theta/2)]\}. \quad (3.52)$$

Используя полученные выше результаты, можно вычислить верхний предел на бран параметр. Результаты экспериментов по наземной атомной интерферометрии [93] дают нам верхний предел, равный  $Q^* \leq 10^8 \text{cm}^2$ .

### 3.4 Эффект Саньяка в пространстве-времени гравитирующего объекта в модели мира на бранах

Как было показано в ряде предыдущих работ, эффект Саньяка для лучей света или пучков частиц, распространяющихся в противоположных направлениях по круговому пути вокруг вращающегося интерферометра в плоском пространстве-времени, может быть формально вычислен по аналогии с эффектом Ааронова-Бома. В данном параграфе эффект Саньяка рассматривается по аналогии с эффектом Ааронова-Бома в пространстве-времени медленно вращающегося гравитационного источника с ненулевым бран параметром. Смещение фазы между пучками, измеряемое наблюдателем, равномерно вращающимся совместно с интерферометром, равно

$$\Delta\phi = \frac{2m\rho_0}{c\hbar} \oint_C \mathbf{A}_G \cdot dx, \quad (3.53)$$

тогда как соответствующая данному смещению фаз разность времен прохождения противоположно распространяющимися пучками кругового пути равна

$$\Delta T = \frac{2\rho_0}{c^3} \oint_C \mathbf{A}_G \cdot dx. \quad (3.54)$$

В выражениях (3.53) и (3.54)  $m$  обозначает массу (энергию) частиц интерферирующих пучков,  $A_G$  – гравитомагнитный векторный потенциал, который может быть получен из выражения

$$\mathbf{A}_i^G \equiv c^2 \frac{\rho_i}{\rho_0}, \quad (3.55)$$

а  $\tau^\alpha(x)$  – единичный вектор 4-скорости частиц, равный

$$\rho^\alpha \equiv \left\{ \frac{1}{\sqrt{-g_{00}}}, 0, 0, 0 \right\}, \quad \rho_\alpha \equiv \left\{ -\sqrt{-g_{00}}, g_{i0}\rho^0 \right\}. \quad (3.56)$$

В экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) путем преобразования координат  $\phi \rightarrow \phi + \Omega t$ , где  $\Omega$  – угловая скорость вращения гравитирующего объекта, метрика (3.1) может быть переписана в следующем виде

$$ds^2 = -(A^2 - r^2\Omega^2 + 2\tilde{\omega}r^2\Omega)dt^2 + H^2dr^2 + r^2d\varphi^2 + 2r^2(\Omega - \tilde{\omega})dtd\varphi . \quad (3.57)$$

В случае слабого гравитационного поля разложим  $H^2$  по степеням  $1/r$ , что даст следующее выражение

$$H^2 \simeq 1 + \frac{2M}{r} - \frac{Q^*}{r^2}. \quad (3.58)$$

Используя это выражение, можно получить поле единичных векторов  $\tau^\alpha(x)$  вдоль траекторий  $r = R = \text{const}$  в виде

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -(\rho^0)^{-1}, \\ \rho_\phi &= r^2(\Omega - \tilde{\omega})\rho^0, \end{aligned} \quad (3.59)$$

где использовано обозначение

$$\rho^0 = \left[ 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2} - r^2\Omega(\Omega - \tilde{\omega}) \right]^{-1/2}. \quad (3.60)$$

Подставляя далее компоненты  $\tau(x)$  в выражение (3.55) можно получить

$$\mathbf{A}_\phi^G = -r^2(\Omega - \tilde{\omega})(\rho^0)^2. \quad (3.61)$$

Интегрируя векторный потенциал (3.61) в выражениях (3.53) и (3.54), можно получить следующий результат для  $\Delta\phi$  и  $\Delta T$  (здесь снова произведен переход к физическим единицам измерения)

$$\Delta\phi = \frac{4\pi m}{\hbar} r^2(\Omega - \tilde{\omega})\rho^0, \quad (3.62)$$

$$\Delta T = \frac{4\pi}{c^2} r^2(\Omega - \tilde{\omega})\rho^0. \quad (3.63)$$

Следуя рассуждениям работы [94], можно найти критическую угловую скорость  $\bar{\Omega}$ , которая соответствует нулевой разности времен прохождения  $\Delta T = 0$ , в виде

$$\bar{\Omega} = \tilde{\omega} = \omega \left( 1 - \frac{Q^*}{2rm} \right). \quad (3.64)$$

$\bar{\Omega}$  есть угловая скорость наблюдателя с нулевым угловым моментом (ННУМ). Так как бран параметр может принимать только отрицательные значения, видно, что критическая угловая скорость  $\bar{\Omega}$  становится больше в модели мира на бранах.

### 3.5 Выводы

В данной главе рассмотрены эффекты квантовой интерференции, в частности, эффект сдвига фазы частиц в нейтронном интерферометре, а также эффект Саньяка в пространстве-времени медленно вращающегося гравитационного источника в модели мира на бранах. В частности, получено выражение для разности фаз интерферирующих пучков в эксперименте Саньяка, модифицированное присутствием бран заряда, и соответствующая данной разности фаз разность времен прохождения кругового пути противоположно распространяющимися пучками. Получена поправка к сдвигу фазы частицы в нейтронном интерферометре, обусловленная присутствием в метрике приливного заряда, и исследована возможности регистрации данной поправки с помощью интерферометра-"восьмерки". Полученные результаты применены к лабораторным гравитационным экспериментам по регистрации интерференционных эффектов, для поиска эффектов связанных с возможным существованием приливного заряда, что позволило найти верхний предел для приливного заряда с использованием наземных прецизионных экспериментов по нейтронной интерференции.

Недавно авторами [95] был найден верхний предел на значение модуля бран параметра в рамках Солнечной системы. Некоторые важные оценки возможного значения бран параметра, полученные из движения планет в Солнечной системе, также описаны в работе [95]. В работе [96] найдено такое же значение для модуля бран параметра из анализа стабильных круговых орбит в окрестности ЧД. В таблице 3.1 приведены значения для модуля бран параметра полученные из земных, солнечных и астрофизических данных.

Также в данной главе рассмотрено приложение полученных результатов

к вычислению энергетических уровней ультрахолодных нейтронов в гравитационном поле в присутствии бран параметра.

Таблица 3.1: Сравнительные данные на значение модуля бран параметра из различных данных.

Из астрофизических наблюдательных данных по аккреционным дискам вокруг ЧД [96]	Из классических тестов в солнечной системе (прецессия перигелия Меркурия) [95]	Из наземных прецизионных экспериментов по квантовой интерференции нейтронов данная глава	В ранней Вселенной в космологии четвертая глава
$ Q^*  \lesssim 10^9 \text{ см}^2$	$ Q^*  \lesssim 10^8 \text{ см}^2$	$ Q^*  \lesssim 10^7 \text{ см}^2$	$ Q^*  \gg 10^9 \text{ см}^2$

## ГЛАВА 4. Энергетические процессы в окрестности черных дыр в некоторых гравитационных моделях

ЧД являются очень интересными объектами как с точки зрения ОТО, так и с геометрической точки зрения. Они представляют собой объекты, кривизна пространства-времени в окрестности которых играет решающую роль при их описании. С этой точки зрения представляет большой интерес исследование ЧД при различных внешних условиях, в том числе и в рамках многомерного пространства-времени. ЧД помимо своих уникальных свойств отличаются стабильностью, что играет немаловажную роль для глубокого понимания четырехмерной теории гравитации. Однако, помимо этого, в настоящее время вызывает широкий интерес построение и исследование теории гравитации для большего числа измерений, что было вызвано развитием теории струн и теории супергравитации, а ЧД представляют собой идеальный объект для подобных исследований. Образцом такого исследования является сопоставление модели пространства-времени анти де-Ситтера и теории конформных полей, что позволяет связать общие аспекты теории супергравитации в пятимерном пространстве-времени с теорией конформных полей на его четырехмерных границах [98]–[100].

Обобщение метрик Шварцшильда и Райсснера-Нордстрема для пространства-времени ЧД было получено в работе [101], а обобщение пространства-времени Керра для ЧД было проделано в работе [102]. Однако интригующим является тот факт, что описание заряженной ЧД в пятимерном пространстве-

времени невозможно, то есть не существует пятимерного аналога ЧД Керра-Ньюмана в рамках теории Эйнштейна-Максвелла. В четырехмерном пространстве-времени при описании заряженной ЧД заряд вводится в пространство-время вращающейся ЧД простым добавлением к члену  $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + q^2$ , и не появляется больше нигде в метрике. Недавно было получено решение, описывающее заряженные ЧД, в приближении медленного вращения [103] (см. также [104] [105]). Решения для заряженных ЧД обсуждались также в контексте теории супергравитации и теории струн в работах [106]–[110]. Решение, полученное в работе [111], представляется наиболее близким аналогом решения Керра-Ньюмана. Однако, проведенные исследования показывают, что простое введение заряда в метрику вращающейся ЧД в таком случае невозможно и оно всегда должно сопровождаться введением некоторого другого поля.

В 1974 г. Хокинг теоретически доказал существование теплового излучения от ЧД [112]. С тех пор, разными авторами были хорошо изучены термодинамические свойства статических, стационарных и нестационарных ЧД. Например, в авторы работы [113] применили полуклассическую модель квантового туннелирования для исследования излучения Хокинга от статической ЧД Шварцшильда и Райсснера -Нордстема. Также в литературе изучено излучение Хокинга в различных пространствах, в том числе – в пространстве-времени анти-де Ситтера [114], в пространстве-времени де Ситтера [115]. В данной главе будет проведено исследование излучения Хокинга в пространстве-времени ЧД на бранах с помощью метода Гамильтона-Якоби и получена зависимость энтропии Бекенштейна-Хокинга от бран параметра.

Электродинамический механизм выделения вращательной энергии ЧД является одним из наиболее вероятных механизмов, объясняющих высокоэнергетические релятивистские потоки от активных галактических ядер, гамма-вспышек и двойных ЧД внутри галактики [116]. При описании в рамках классической физики часто проводится аналогия между горизонтом событий компактного объекта и вращающимся намагниченным проводником [117]. Данный подход был канонически описан под названием "мембранная парадиг-

ма" в работе [118]. Подобное описание ставит ЧД на такую же позицию, что и, скажем, Солнце, так как механизм Блендфорда-Знаека несильно отличается от механизма магнитного торможения, представленного в работе [119]. В этом отношении так называемый эффект Мейсснера в электродинамике ЧД, который заключается в выталкивании магнитного потока за пределы горизонта событий быстро вращающегося компактного объекта, уменьшает роль механизма Блендфорда-Знаека в астрофизике, так как "проводник" в этом случае становится ненамагниченным.

В работе [120] было найдено точное стационарное вакуумное решение для вращающейся ЧД, помещенной в постоянное на бесконечности магнитное поле, направленное вдоль оси вращения ЧД. С использованием данного решения в работе [121] был вычислен полный магнитный поток, а также показано, что для максимально быстро вращающейся ЧД магнитный поток полностью вытесняется за горизонт событий. Получаемое в результате явление аналогично эффекту Мейсснера, который заключается в вытеснении магнитного поля сверхпроводником. Далее в работе [122] было показано, что данный результат справедлив также для всех осесимметричных стационарных вакуумных решений и негативным образом отражается на возможности применения к данному случаю механизма Блендфорда-Знаека. Позднее это было также подтверждено рядом исследований других авторов [123]. Проблема движения двух вращающихся тел в ОТО подробно исследована в работах [124, 125]:

Исследование электромагнитных процессов в окрестности компактного объекта в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ представляет большой интерес, так как оно открывает возможность экспериментальной проверки существования так называемого гравитомагнитного монопольного момента. Одной из целей данной главы является получение точных решений для электромагнитных полей в окрестности компактных объектов с ненулевым НУТ параметром, а также исследование движения пробных частиц в полученном электромагнитном и гравитационном полях. Вдобавок к этому, исследуется вопрос об извлечении энергии электромагнитного поля в окрестности гравитирующего объекта, обладающего гравитомагнитным монопольным моментом, т.е.

так называемый эффект Блендфорда-Знаека.

Глава организована следующим образом. Параграф 4.1 посвящен исследованию влияния бран-параметра на тепловое излучение Хокинга. В параграфе 4.2 будут рассмотрены различные механизмы извлечения энергии ЧД в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ. В частности, в параграфе 4.2.1 приведены общие уравнения электродинамики во внешнем гравитационном поле компактного объекта, обладающего ненулевым гравитомагнитным зарядом, параграф 4.2.2 посвящен эффекту Мейсснера, параграф 4.2.3 - эффекту Блендфорда-Знаека, а параграф 4.2.4 - эффекту Пенроуза в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ. Последний параграф посвящен выводам.

## 4.1 Тепловое излучение Хокинга в метрике медленно вращающегося компактного объекта на бранах

Внешняя метрика медленно вращающегося компактного объекта на бране имеет следующую форму [5]:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + H dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 - 2\tilde{\omega}(r)r^2 \sin^2 \theta dt d\phi. \quad (4.1)$$

где

$$N^2 \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^*}{r^2}\right) = H^{-2}, \quad \tilde{\omega}(r) = \frac{2Ma}{r^3} \left(1 - \frac{Q^*}{2Mr}\right). \quad (4.2)$$

здесь  $M$  – полная масса,  $a$  – угловой импульс ЧД,  $Q^*$  – бран параметр. Площадь и энтропия Бекнштейна-Хокинга, соответствующие внешнему горизонту событий ЧД, выражаются следующим образом:

$$A_+ = \int \sqrt{-g} d\theta d\phi = 4\pi r_+^2, \quad S_{BH} = (1/4)A_+ = \pi r_+^2. \quad (4.3)$$

Согласно условию  $g_{00} = 0$ , а также уравнению  $g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f = 0$ , где  $f$  – действие для частицы во внешнем поле, на горизонте событий ЧД может быть получено

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^*}. \quad (4.4)$$

Для удобства выполним следующее преобразование координат [127]

$$\dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{03}}{g_{33}}. \quad (4.5)$$

Теперь метрика 4.1 принимает следующий вид:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + H^2 dr^2 + r^2 d\theta \quad (4.6)$$

Классическое действие  $I$  для излучаемой частицы удовлетворяет релятивистскому уравнению Гамильтона-Якоби

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu f \partial_\nu f + u^2 = 0, \quad (4.7)$$

где  $u$  – масса излучаемой частицы, и  $g^{\mu\nu}$  – контравариантные компоненты метрического тензора, отличные от нуля из которых имеют следующий вид:

$$g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \quad g^{11} = \frac{1}{H^2}, \quad g^{22} = \frac{1}{r^2}. \quad (4.8)$$

Подставляя их в (4.7), получим

$$-\frac{1}{P(r, \theta)} (\partial_t I)^2 + Z(r, \theta) (\partial_r I)^2 + C(r, \theta) (\partial_\theta I)^2 + u^2 = 0, \quad (4.9)$$

$$P(r, \theta) = -N^2, \quad Z(r, \theta) = \frac{1}{H^2}, \quad C(r, \theta) = \frac{1}{r^2}. \quad (4.10)$$

Учитывая аксиальную симметрию пространства-времени ЧД, произведем разделение переменных в (4.9), используя следующую форму действия

$$I = -\omega t + W(r, \theta) + j\phi, \quad (4.11)$$

где  $\omega$  – энергия излучаемой частицы,  $W(r, \theta)$  – обобщенный импульс и  $j$  – момент импульса относительно оси  $\phi$ . Подставляя (4.11) в (4.9), можно получить

$$\frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{\sqrt{P(r, \theta)Z(r, \theta)}} \times \sqrt{(\omega - j\Omega)^2 - P(r, \theta)\{C(r, \theta)[\partial_\theta W(r, \theta)]^2 + u^2\}}, \quad (4.12)$$

где  $\Omega = \frac{d\phi}{dt}$ . Из уравнения (4.12) видно, что мнимая часть действия излучаемой частицы возникает только на горизонте событий. Для удобства в работе [132] введено следующие обозначение:

$$d\sigma = H^2 + r^2 d\theta. \quad (4.13)$$

Для частицы, не совершающей движение в направлении  $\theta$  ( $d\theta = 0$ ), выражение (4.13) принимает следующий вид:

$$\sigma = \int [Z(r, \theta)]^{-1/2} . \quad (4.14)$$

Применяя следующее приближение вблизи горизонта событий

$$P(r, \theta) = P'(r_+, \theta)(r - r_+) + \dots, \quad Z(r, \theta) = Z'(r_+, \theta)(r - r_+) + \dots, \quad (4.15)$$

где

$$P'(r, \theta) = \frac{\partial P(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_+}, \quad Z'(r, \theta) = \frac{\partial Z(r, \theta)}{\partial r} \Big|_{r=r_+}, \quad (4.16)$$

можно получить

$$\sigma = \frac{2}{\sqrt{Z'(r_+, \theta)}} \sqrt{(r - r_+)}. \quad (4.17)$$

Из (4.12)-(4.17) имеем

$$W(\sigma) = \int \frac{d\sigma}{d\sigma} \sqrt{(\omega - J\Omega_+)^2 - P(r, \theta) \{C(r, \theta) [\partial_\theta W(r, \theta)]^2 + u^2\}} \times \frac{1}{\sqrt{P'(r_+, \theta) Z'(r_+, \theta)}}, \quad (4.18)$$

где  $\Omega_+ = \frac{2Ma}{r_+^3}$  – угловая скорость на горизонте событий. Поставляя (4.11) в полученное выражение (4.18), получим мнимую часть действия в виде

$$\text{Im}I = \frac{\pi r_+^2}{(M - \frac{Q^*}{r_+})} (\omega - j\Omega_+), \quad (4.19)$$

тогда как температура на поверхности ЧД равна

$$T = \frac{1}{2\pi r_+^2} (M - \frac{Q^*}{r_+}). \quad (4.20)$$

Зависимость температуры от бран параметра приведена на Рис. 4.1. Если излучаемая частица обладает энергией  $\varepsilon$  и угловым моментом  $j$ , то масса и момент импульса ЧД должны быть изменены на  $M - \varepsilon$ ,  $J - j$ . Таким образом, мнимая часть действия должна иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Im}I = & \pi \int_{0,0}^{\varepsilon,j} \frac{r'^2}{(M - \varepsilon' - \frac{Q^*}{r'_+})} (d\omega' - \Omega_+ dj') = \\ & -\pi \int_{(M,j)}^{(M-\varepsilon, J-j)} \frac{r'_+{}^2}{(M - \varepsilon' - \frac{Q^*}{r'_+})} [d(M - \varepsilon') - \Omega_+ d(J - j')] , \quad (4.21) \end{aligned}$$

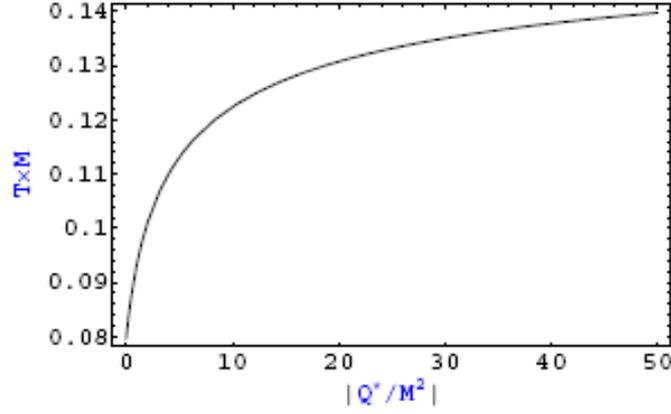


Рис. 4.1: Зависимость температуры от бран параметра.

где

$$J - j = (M - \varepsilon')a \quad r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^*} . \quad (4.22)$$

Подставляя (4.22) в (4.21), можно получить следующее выражение для мнимой части интеграла

$$\begin{aligned} \text{Im}I &= -\pi \int_M^{M-\varepsilon} \frac{(M - \varepsilon' + \sqrt{(M - \varepsilon')^2 - Q^*})^2}{\left(M - \varepsilon' - \frac{Q^*}{(M - \varepsilon' + \sqrt{(M - \varepsilon')^2 - Q^*})}\right)} d(M - \varepsilon') = \\ &= -\pi \left[ (M - \varepsilon)^2 + (M - \varepsilon) \sqrt{(M - \varepsilon)^2 - Q^*} - \right. \\ &\quad \left. (M^2 + M \sqrt{M^2 - Q^*}) \right] = -\frac{1}{2} \Delta S_{BH} , \end{aligned} \quad (4.23)$$

где  $\Delta S = S(M - \varepsilon) - S(M)$  изменение энтропии Бекенштена-Хокинга в пространстве-времени с ненулевым бран параметром. Из рисунка 4.1 видно, что с увеличением бран параметра температура ЧД повышается. Энергия, излучаемая частицами, зависит от температуры и поэтому с увеличением модуля бран параметра энергия потока излучения усиливается.

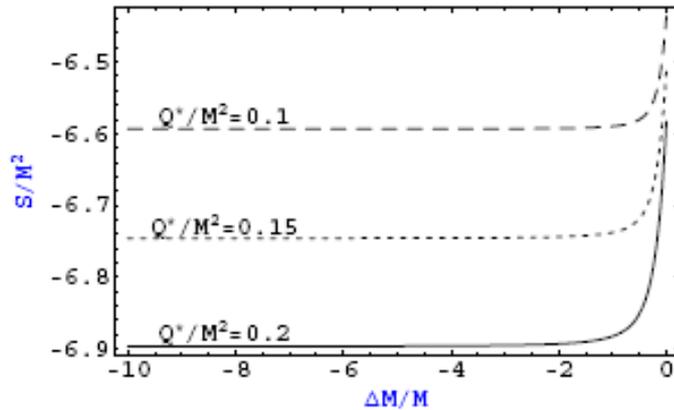


Рис. 4.2: Зависимость изменения энтропии Бекенштейна Хокинга  $\Delta S/M^2$  от параметра  $(M - \epsilon)/M$  при разных значениях  $Q^*/M^2$

## 4.2 Механизмы Блендфорда-Знаека, Пенроуза и Мейснера в плазменной магнитосфере компактных объектов в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ

### 4.2.1 Уравнения электродинамики во внешнем гравитационном поле компактных объектов

В данной главе рассматривается только наиболее важный для астрофизики случай пробного поля, то есть предполагается, что плотность энергии электромагнитного поля слишком мала для того, чтобы существенно повлиять на кривизну пространства-времени. В процессе работы используется формализм 3+1 расщепления для описания электродинамики ЧД, разработанный в работе [128].

Тогда как более известная формулировка данного формализма, описанная в работе [129], адаптирована к описанию расщепления пространства-времени типа Бойера-Линдквиста, имеющего координатную сингулярность на горизонте событий, формулировка, описанная в работе [128], является более обобщенной и может быть использована также при исследовании расщепления пространства-времени типа Керра-Шилда. Это является важным фактом, так как расщепление Керра-Шилда не содержит координатной син-

гулярности на горизонте событий, что имеет существенные преимущества как для аналитического, так и для численного исследования физических процессов, имеющих место внутри горизонта событий. Электромагнитные процессы при этом описываются стандартными уравнениями Максвелла классической электродинамики сплошных сред

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad -\partial_t \mathbf{B} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \partial_t \mathbf{D} - \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}. \quad (4.24)$$

Вектора  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны с тензором электромагнитного поля  $F_{\alpha\beta}$  следующими соотношениями

$$B^i = \frac{1}{2} e^{ijk} F_{jk}, \quad E_i = F_{it}, \quad D^i = \alpha F^{ti}, \quad H^i = \frac{\alpha}{2} e_{ijk} F^{jk}, \quad (4.25)$$

где  $e_{ijk}$  – тензор Леви-Чивита.

Искривленное пространство-время ЧД проявляет себя как электромагнитно активная среда, электромагнитные свойства которой описываются следующими уравнениями

$$\mathbf{E} = \alpha \mathbf{D} + \beta \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = \alpha \mathbf{B} - \beta \times \mathbf{D}, \quad (4.26)$$

где  $\alpha$  – поправочная функция, а  $\beta$  – вектор смещения различных листов пространства-времени. Согласно принципам ОТО, наиболее подходящим является описание локальных физических процессов в системах отсчета локально инерциальных наблюдателей, находящихся в данный момент в покое в "абсолютном пространстве" одного из листов ("эталонные наблюдатели"). С точки зрения такого наблюдателя  $\mathbf{B}$  является локальным магнитным полем,  $\mathbf{D}$  – локальной плотностью электрического тока,  $\mathbf{j}$  связано с  $\mathbf{J}$  посредством уравнения Ампера

$$\mathbf{J} = \alpha \mathbf{j} + \rho_e \beta. \quad (4.27)$$

Пренебрегая эффектом инерции для заряженной частицы, можно записать обобщенный закон Ома для данного случая в следующем виде

$$\mathbf{J} = \sigma_{\parallel} \mathbf{D}_{\parallel} + \sigma_{\perp} \mathbf{D}_{\perp} + \mathbf{j}_d, \quad (4.28)$$

где

$$\mathbf{j}_d = \rho_e \frac{\mathbf{D} \times \mathbf{B}}{\tilde{B}^2}$$

есть ток смещения,  $\sigma_{\parallel} D_{\parallel}$  – ток проводимости, параллельный магнитному полю, а  $\sigma_{\perp} D_{\perp}$  – ток проводимости, перпендикулярный магнитному полю (см. также [128]). В плазме, где пренебрегается столкновениями частиц, находящейся в сильном магнитном поле, перпендикулярная полю компонента проводимости очень мала, так что можно с большой точностью использовать значение  $\sigma_{\perp} = 0$ . Компонента проводимости, параллельная полю, напротив, очень велика, результатом чего является то, что продольная компонента электрического поля практически исчезает,  $D_{\parallel} \ll B$ .

#### 4.2.2 Эффект Мейсснера в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ

Первым делом при исследовании роли проводимости в эффекте Мейсснера в рамках электродинамики ЧД рассмотрим известную задачу Уолда [120]. Стационарное вакуумное решение уравнений электродинамики в этом случае описывает не только магнитное, но и электрическое поле.

Решения для магнитного поля принимают вид

$$\begin{aligned} B^{\phi} &= B_0(g_{\phi r, \theta} + 2ag_{tr, \theta})/\sqrt{\gamma}, & B^r &= -B_0(g_{\phi\phi, \theta} + 2ag_{t\phi, \theta})/\sqrt{\gamma}, \\ B^{\theta} &= B_0(g_{\phi\phi, r} + 2ag_{t\phi, r})/\sqrt{\gamma}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

где  $t, \phi, r$  и  $\theta$  – координаты Керра-Шилда,  $g_{\nu\mu}$  – метрический тензор, а  $\gamma$  – определитель пространственной части метрического тензора,  $B_0$  – внешнее магнитное поле.

Решения для электрического поля принимают вид

$$E_{\phi} = 0, \quad E_r = -B_0(g_{t\phi, r} + 2ag_{tt, r}), \quad E_{\theta} = -B_0(g_{t\phi, \theta} + 2ag_{tt, \theta}). \quad (4.30)$$

(Компоненты  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{E}$  заданы в ненормализованном координатном базисе Керра-Шилда.) Возникновение в решении компонент электрического поля является частным случаем электромагнитной активности искривленного пространства-времени. Этот эффект является очень важным в астрофизике и обеспечивает реализацию процесса Блендфорда-Знаека.

Рассмотрим эффект Мейсснера для компактного астрофизического объекта в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ, задаваемом в сферической системе координат  $(ct, r, \theta, \phi)$  метрикой

$$ds^2 = -\frac{1}{\Sigma}(\Delta - a^2 \sin^2 \theta)dt^2 + \frac{2}{\Sigma}[\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta]dtd\varphi + \frac{1}{\Sigma}[(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta]d\varphi^2 + \frac{\Sigma}{\Delta}dr^2 + \Sigma d\theta^2 \quad (4.31)$$

где параметры  $\Sigma$ ,  $\Delta$  и  $\chi$  определены как

$$\Sigma = r^2 + (l + a \cos \theta)^2, \quad \Delta = r^2 - 2Mr - l^2 + a^2, \quad \chi = a \sin^2 \theta - 2l \cos \theta,$$

$l$  – гравитомагнитный монополярный момент,  $a = J/M$  – характерный угловой момент источника с общей массой  $M$ .

Магнитная часть решения дается выражениями

$$B^\phi = 0, \quad B^r = -B_0(g_{\phi\phi,\theta})/\sqrt{\gamma}, \quad B^\theta = B_0(\phi\phi, r)\sqrt{\gamma}, \quad (4.32)$$

а электрическая часть решения дается выражениями

$$E_\phi = 0, \quad E_r = -B_0(2ag_{tt,r}), \quad E_\theta = -B_0(2ag_{tt,\theta}). \quad (4.33)$$

Используя метрику Керр-Тауб-НУТ (4.31), можно получить

$$B^r = B_0 \left( \frac{\Delta}{(a^2 \sin^2 \theta - \Delta)[(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta]} \right)^{1/2} [2a \sin \theta \frac{l + \cos \theta}{\Sigma^2} \times [(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta] + \frac{1}{\Sigma} [\sin 2\theta(\Sigma + a\chi)^2 - 2\Delta(a \sin 2\theta + 2l \sin \theta)]] \quad (4.34)$$

$$B^\theta = -B_0 \left( \frac{\Delta}{(a^2 \sin^2 \theta - \Delta)[(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta]} \right)^{1/2} \times \left[ \frac{-2r}{\Sigma^2} [(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta] + \frac{1}{\Sigma} [4r \sin^2 \theta(\Sigma + a\chi) - \chi^2(2r - 2M)] \right] \quad (4.35)$$

и

$$E_r = -B_0 \left[ \frac{2r}{\Sigma^2} (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) - \frac{1}{\Sigma} (2r - 2M) \right] \quad (4.36)$$

$$E_\theta = -B_0 \left[ \frac{1}{\Sigma^2} (a^2 \cos \theta \Sigma - 2a \sin \theta (l + a \cos \theta) (\Delta - a^2 \sin^2 \theta)) \right] \quad (4.37)$$

где  $\gamma = \frac{1}{\Delta}(a^2 \sin^2 \theta - \Delta)[(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta]$  – определитель метрического тензора 3-пространства.

### 4.2.3 Механизм Блендфорда-Знаека в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ

С использованием координат Бойера-Линдквиста  $(ct, r, \theta, \phi)$  общая метрика аксиально-симметричного пространства-времени может быть записана в форме

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 h_i^2 (dx^i - \omega_i dt)^2 - \alpha^2 (cdt)^2 = \sum_{i=1}^3 (h_i dx^i - c\alpha\beta_i dt)^2 - \alpha^2 (cdt)^2, \quad (4.38)$$

где  $h_i$  – масштабный коэффициент при координате  $x^i$ ,  $\omega_i$  – угловая скорость, описывающая эффект увлечения инерциальных систем отсчета,  $\alpha$  – поправочная функция, а  $\beta_i = h_i\omega_i(c\alpha)$  – вектор смещения.

Для пространства-времени Керр-Тауб-НУТ (4.31) имеем

$$\alpha = \sqrt{\frac{\Sigma\Delta \sin^2 \theta}{(\Sigma + a\chi)^2 \theta - \chi^2 \Delta}}, h_1 = \sqrt{\frac{\Sigma}{\Delta}}, h_2 = \sqrt{\Sigma}, h_3 = \sqrt{\frac{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}{\Sigma}}$$

$$\beta_1 = \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta}{\Sigma \sin \theta}, \omega_3 = -\frac{\Delta\chi - a(\Sigma + a\chi) \sin^2 \theta}{(\Sigma + a\chi)^2 \sin^2 \theta - \chi^2 \Delta}.$$

Данная метрика обладает трансляционной симметрией по отношению к  $t$  и  $\phi$ , так что можно получить закон сохранения

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} T^{\mu\nu} \xi_\nu) = 0 \quad (4.39)$$

где  $g = \text{Det}(g_{\mu\nu}) = -(\alpha h_1 h_2 h_3)^2$  – определитель метрического тензора,  $T^{\mu\nu}$  – тензор энергии-импульса, а  $\xi^\nu$  – вектор Киллинга. Если рассматривать плазму в однокомпонентном приближении, можно получить

$$T^{\mu\nu} = \rho g^{\mu\nu} + \eta U^\mu U^\nu + F_\sigma^\mu F^{\sigma\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\rho\sigma} F_{\sigma\rho}, \quad (4.40)$$

где  $\rho$  – собственное давление,  $\eta = e_{int} + \rho$  – плотность энтальпии,  $U^\mu$  – 4-скорость. Плотность внутренней энергии в этом случае задается выражением  $e_{int} = \rho/(\Gamma - 1) + \rho c^2$  для адиабатической плазмы, где  $\Gamma$  – показатель адиабаты.

С помощью векторов Киллинга  $\xi^\mu = (-1, 0, 0, 0,)$  и  $(0, 0, 0, 1)$  получаем законы сохранения энергии и импульса в виде

$$\frac{\partial e^\infty}{\partial t} = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial x^i} (h_1 h_2 h_3 S^i) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial l}{\partial t} = -\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum_i \frac{\partial}{\partial x^i} (h_1 h_2 h_3 M^i), \quad (4.42)$$

где  $e^\infty = -\alpha g_{\nu 0} T^{\nu 0}$  – так называемая "плотность энергии на бесконечности которая соответствует полной плотности энергии плазмы и поля,  $S^i = -c\alpha g_{\mu 0} T^{i\nu}$  – плотность потока энергии,  $l = \alpha g_{3\nu} T^{3\nu/c}$  – плотность углового момента, а  $M^i = \alpha h_i T^{i\nu} g_{\nu 3}$  – плотность потока углового момента.

Вводя систему отсчета, связанную с так называемым "наблюдателем с нулевым угловым моментом" (ННУМ), имеем в ней  $dt = \alpha dt$  и  $dx^i = h_i(dx^i - \omega_i dt)$ . Так как данная система отсчета локально описывается пространством-временем Минковского  $ds^2 = -(cdt)^2 + \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , все наблюдаемые величины в этой системе связаны интуитивно понятными соотношениями. К примеру, скорость  $v^i$ , Лоренц-фактор  $\gamma = U^0 = [1 - \sum_{i=1}^3 (v^i/c)^2]^{-1/2}$  и 4-скорость  $U^i = h_i U^i - c\alpha\beta^i U^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) связаны соотношением  $U^i = \gamma v^i$ . Здесь и далее величины, измеренные наблюдателем ННУМ, обозначены шляпками,  $\wedge$ . Из уравнения (4.40) можно получить

$$e^\infty = \alpha e + \sum \omega_i h_i P^i = \alpha e + \omega_3 l, \quad (4.43)$$

$$l = h_3 P^3. \quad (4.44)$$

Здесь  $e = \eta\gamma^2 - \rho + (B^2 + E^2/c^2)/2$  – энергия, а  $P^i = \{\eta\gamma^2 v^i + (E \times B)^i\}/c^2$  –  $i$ -я компонента плотности импульса, где  $B^i = e^{ijk} F_{jk}/2$  и  $E^i = c\eta^{ij} F_{j0} = cF_0^i = cF_{i0}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – компоненты магнитного и электрического полей соответственно ( $e^{\mu\nu\lambda}$  – тензор Леви-Чивита). Тензор электромагнитного поля  $F_{\mu\nu}$  нормализован таким образом, чтобы  $|B|^2/2$  и  $|E|^2/(2c^2)$  давали плотность энергии магнитного и электрического полей соответственно.

Уравнения (4.43) и (4.44) могут быть разделены на гидродинамическую и

электромагнитную компоненты  $e^\infty = e_{hyd}^\infty + e_{EM}^\infty$  и  $l = l_{hyd} + l_{EM}$ , где

$$e_{hyd}^\infty = \alpha e_{hyd} + \sum_i \omega_i h_i \frac{\eta}{c^2} \gamma^2 v^i = \alpha e_{hyd} + \omega_3 l_{hyd}, \quad (4.45)$$

$$e_{EM}^\infty = \alpha e_{EM} + \sum_i \omega_i h_i \frac{1}{c^2} (E \times B)_i = \alpha e_{EM} + \omega_3 l_{EM}, \quad (4.46)$$

$$l_{hyd} = h_3 \frac{\eta}{c^2} \gamma^2 v^3, \quad (4.47)$$

$$l_{EM} = h_3 \frac{1}{c^2} (E \times B)_3. \quad (4.48)$$

Здесь  $e_{hyd} = \eta \gamma^2 - \rho$  и  $e_{EM} = (B^2 + E^2/c^2)/2$  – гидродинамическая и электромагнитная составляющие плотности энергии, измеренной в системе отсчета ННУМ.

Согласно механизму Блендфорда-Знаека, энергия распространяется вовне от горизонта ЧД, когда угловая скорость горизонта ЧД  $\Omega_H$  больше угловой скорости магнитных силовых линий  $\Omega_F$ :  $\Omega_H > \Omega_F$ . Несмотря на то, что это утверждение, казалось бы, противоречит самому определению горизонта, за пределы которого не может выйти никакая энергия, вещество или информация [130], этот процесс может трактоваться как сообщение ЧД отрицательной электромагнитной энергии магнитного поля на бесконечности [131]. Далее покажем, что электромагнитная энергия на бесконечности действительно становится отрицательной в том случае, когда  $\Omega_H > \Omega_F$ .

Из уравнений (4.46) и (4.48), а также определений  $e_{EM}$  и  $P^i$ , электромагнитная энергия на бесконечности  $e_{EM}^\infty$  может быть записана в виде

$$e_{EM}^\infty = \frac{\alpha}{2} (B^2 + E^2) + \alpha \beta \cdot (E \times B). \quad (4.49)$$

Рассматривая стационарные электромагнитные поля в бессиловом приближении, можно получить следующее выражение для электрического поля, наблюдаемого ННУМ

$$E = -\frac{h_3}{\alpha} (\Omega_F - \omega_3) e_\phi \times B^P, \quad (4.50)$$

где  $e_\phi$  – единичный вектор, параллельный азимутальной координате,  $B^P = B - B_\phi e_\phi$  – полоидальное магнитное поле, а  $\Omega_F$  постоянно вдоль трубки, создаваемой магнитными силовыми линиями. Используя выражение для скорости

магнитных трубок, полученной в системе отсчета ННУМ,  $v v_F = (h_3/\alpha)(\Omega_F - \omega_3)e_\phi$ , можно переписать уравнение (4.50) в знакомой форме  $E = -v_F \times B^P$ . Подставляя уравнение (4.50) в (4.49), можно получить выражение для электромагнитной энергии на бесконечности,

$$e_{EM}^\infty = \frac{(B^P)^2}{2\alpha} h_\phi^2 [\Omega_F^2 - (\omega_3)^2 \{1 - \frac{1}{(\beta_3)^2} - (\frac{B_\phi}{\beta_3 B^P})^2\}]. \quad (4.51)$$

Рассмотрим электромагнитную энергию на бесконечности в близкой окрестности горизонта событий. Граничное условие для электромагнитного поля на горизонте событий примем в виде

$$B_\phi = v_F^\phi(r \rightarrow r_h) \cdot B^P, \quad (4.52)$$

где  $r_h$  – радиус горизонта. Условие (4.52) тесно связано с предположением равенства альфвеновской скорости и скорости света  $c$  в бессиловом магнитном поле. Оно также идентично условию, используемому в работе [116], несмотря на то, что в данной работе это выражение выглядит довольно сложно. После некоторых преобразований уравнений (4.51) и (4.52) на горизонте событий можно получить

$$\alpha e_{EM}^\infty = h_3^2 (B^P)^2 \Omega_F (\Omega_F - \omega_3). \quad (4.53)$$

Из уравнения (4.53) очевидно, что при  $\Omega_F < \omega_3$  энергия на бесконечности принимает отрицательные значения и возможно извлечение энергии ЧД. Несмотря на противоречие с определением горизонта, который не может покидать, распространяясь вовне, никакое вещество, энергия или информация, этот механизм может быть объяснен как движение отрицательной электромагнитной энергии на бесконечности по направлению к компактному объекту. Полученные выражения описывают механизм Блендфорда-Знаека в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ. На рисунке 1 показана зависимость разности  $\Omega_F - \omega_3$  от параметра  $a/M$  для нескольких различных значений НУТ-параметра  $l = l/M$ . График, соответствующий нулевому НУТ параметру, также был получен ранее в работе [5]. Из полученных выражений явно следует, что присутствие гравитационного заряда компактного объекта уменьшает абсолютное значение  $\omega_3$ , что отражается на процессе извлечения энергии данного объекта.

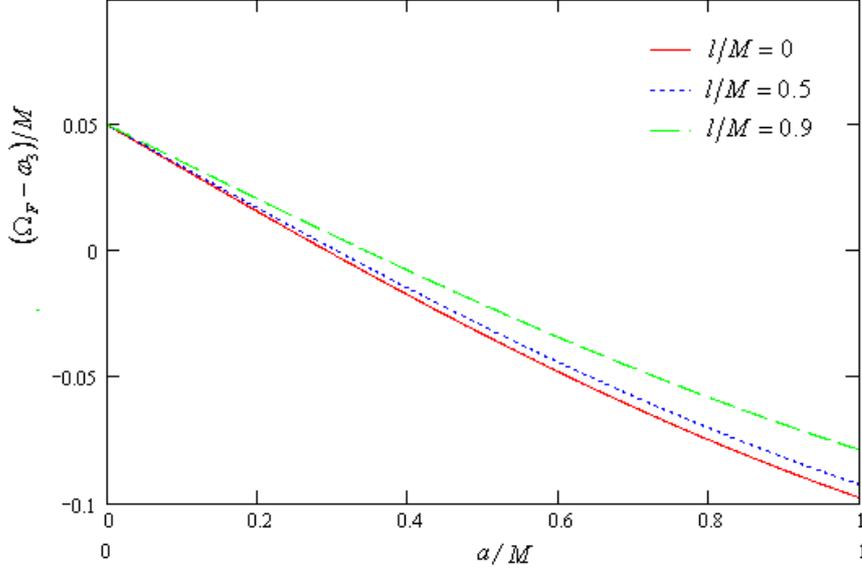


Рис. 4.3: Зависимость величины  $\Omega_F - \omega_3$  от параметра вращения источника, обладающего ненулевым гравитомагнитным зарядом, для различных значений НУТ-параметра.

#### 4.2.4 Процесс Пенроуза в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ

При рассмотрении частицы с массой покоя  $m$ , расположенной в точке  $r_p(t)$  в отсутствие электромагнитного поля, так что  $\rho = \frac{m}{\gamma} \delta^3(r - r_P(t))$ ,  $\rho = 0$  и  $B = E = 0$ , энергия на бесконечности и угловой момент такой частицы описываются уравнениями (4.26)

$$E_\infty = \int_{\Omega} e^\infty dV = \alpha \gamma m c^2 + \omega_3 L, \quad (4.54)$$

$$L = \int_{\Omega} l dV = h_3 m \gamma v^3, \quad (4.55)$$

где интегрирование проводится по всему объему пространства. Как энергия на бесконечности, так и угловой момент такой частицы сохраняются, если она не испытывает никаких взаимодействий на своем пути.

С помощью уравнений (4.54) и (4.55) можно получить энергию на бесконечности для такой частицы в виде

$$E^\infty = \alpha \gamma m c^2 \left(1 + \beta_3 \frac{v^3}{c}\right). \quad (4.56)$$

Если  $\beta_3 v^3/c < -1$ , энергия на бесконечности описываемой частицы становится отрицательной. Это условие может быть удовлетворено только в пределах

эргосферы ( $\beta_3 > 1$ ). Используя соотношение  $\alpha^2\{1 - \sum_i(\beta_i)^2\} = -g_{00}$ , можно получить хорошо известное определение для эргосферы  $g_{00} > 0$ .

При распаде частицы в эргосфере,  $A \rightarrow B + C$ , законы сохранения энергии на бесконечности и углового момента могут быть записаны как

$$E_A^\infty = E_B^\infty + E_C^\infty \quad (4.57)$$

$$L_A = L_B + L_C, \quad (4.58)$$

$$E_I^\infty = \alpha\gamma_I m_I c^2 + \omega_3 L_3 \quad (I=A,B,C) \quad (4.59)$$

Если при распаде также выполняется условие

$L_B = h_3 m_B \gamma_B v_B^3 < -ch_3 m_B / \sqrt{(\beta_3)^2 - 1}$ , то энергия на бесконечности становится отрицательной  $E_B^\infty < 0$  и  $E_A^\infty < E_C^\infty$ . Частица  $C$  при этом уходит на бесконечность, а частица  $B$  заглатывается ЧД, в результате чего масса ЧД уменьшается. В конечном счете такой процесс приводит к извлечению вращательной энергии ЧД. На рисунке 4.4 изображена радиальная зависимость параметра  $S(r) = h_3 m_B \gamma_B v_B^3 + h_3 m_B / \sqrt{(\beta_3)^2 - 1}$  для различных значений НУТ параметра  $l$ . Из рисунка (3) видно, что присутствие гравитомагнитного заряда усиливает процесс Пенроуза.

### 4.3 Выводы

В главе показано, что влияние бран параметра на излучение Хокинга от ЧД приводит к увеличению температуры излучения. Т.е. показано, что с увеличением бран параметра интенсивность излучения, а также температура ЧД повышаются. Предполагается, что в ранней Вселенной за счет флуктуаций плотного вещества были образованы мини ЧД. Астрономические наблюдения показывают их отсутствие на данной эпохе Вселенной. Это говорит о том, что вероятно величина бран параметра эволюционирует с течением времени и возможно модуль ее величины был достаточно большим в ранней эпохе, что привело к раннему распаду или непродолжительному периоду жизни мини ЧД.

Вытеснение осесимметричных магнитных полей за пределы горизонта событий быстро вращающихся ЧД проявило себя как очень важный эффект

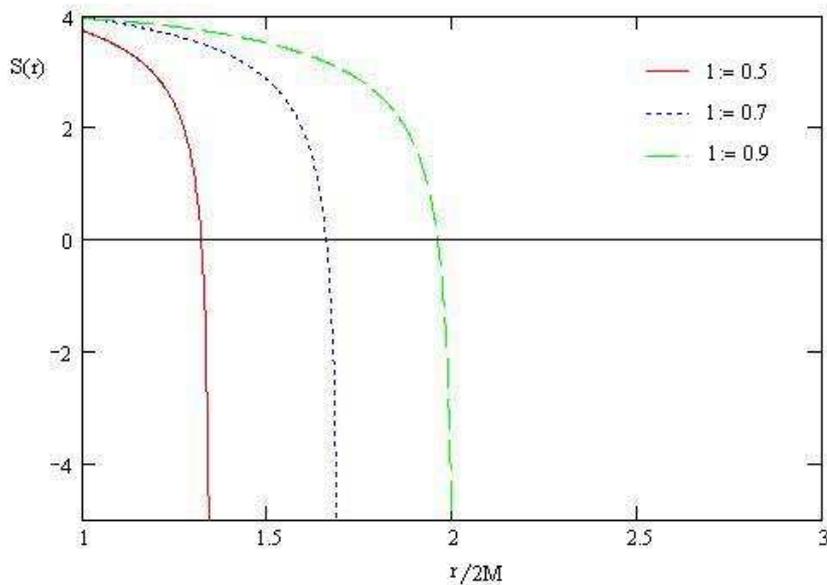


Рис. 4.4: Радиальная зависимость величины  $S(r) = h_3 m_B \gamma_B v_B^3 + h_3 m_B / \sqrt{(\beta_3)^2 - 1}$  в окрестности компактного объекта с ненулевым гравитомагнитным зарядом для различных значений НУТ параметра.

с точки зрения астрофизики, так как оно может существенно уменьшить и даже свести к нулю механизм Блендфорда-Знаека, снабжающий энергией релятивистские струи в окрестности активных ядер галактик и гамма-вспышек. Однако, этот эффект, схожий с эффектами Мейсснера, наиболее заметно проявляется в вакуумных решениях уравнений электродинамики для ЧД, тогда как механизм Блендфорда-Знаека тесно связан с присутствием плазменной магнитосферы объекта. В данной главе доказано, что наличие проводимости существенно изменяет свойства аксиально симметричных решений уравнений электродинамики – даже для максимально быстро вращающегося объекта в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ магнитное поле присутствует внутри горизонта событий. Более того, условия, необходимые для возникновения исходящего потока Пойнтинга в механизме Блендфорда-Знаека, выполняются не только на самом горизонте, но и везде в пределах эргосферы ЧД. Таким образом, эффект Мейсснера, во всяком случае, в том виде, в котором он описан на настоящий момент, вряд ли мог бы играть какую-либо роль в астрофизике ЧД.

## Основные результаты и заключение

Перечислим основные результаты, полученные в диссертационной работе:

1. Получены точные аналитические выражения для электромагнитного поля во внутренней и внешней областях осциллирующей намагниченной компактной звезды в ОТО для произвольной конфигурации невозмущенного магнитного поля звезды и скорости ее осцилляций.
2. Получено общерелятивистское выражение для потерь энергии осциллирующей НЗ, обладающей дипольным магнитным полем, и доказано, что за счет эффектов ОТО потери энергии такой звезды становятся больше ньютоновского значения в 2–6 раз в зависимости от параметра компактности звезды.
3. Получены точные аналитические релятивистские выражения для электромагнитного поля в ближней и волновой зонах намагниченной компактной звезды, в случае, когда звезда испытывает а) сфероидальные осцилляции, б) радиальные осцилляции, в) тороидальные осцилляции. Для указанных трех случаев получены точные релятивистские выражения для потерь энергии осцилляций звезды за счет электромагнитного излучения, генерируемого осцилляциями. Показано, что учет релятивистских поправок может увеличить значение электромагнитных потерь энергии звезды до восьми раз по сравнению с ньютоновским значением, в зависимости от параметра компактности звезды и типа испытываемых осцилляций. Получено точное релятивистское выражение для затухания энергии осцилляций звезды за счет джоулева нагрева в приближении конечной проводимости звезды и показано, что поправки ОТО в этом случае также являются непренебрежимыми.
4. Наблюдаемые моды колебаний ( $n = 0, l = 2$ ) для тороидальных осцилляций нейтронных звезд дают значения для частот 30 Гц и 28 Гц для

ИМПГ SGR 1806-20 и SGR 1900+14, соответственно [14]. Однако вычисления в ньютоновской гравитации дают частоту 36.5 Гц [67]. Учет гравитационного красного смещения, произведенный в данных вычислениях для стандартной НЗ, приводит к частоте осцилляций 29.2 Гц, что находится в хорошем согласии с наблюдениями. С другой произведенные расчеты подтверждают, что ИМПГ SGR 1806-20 и SGR 1900+14 являются НЗ а не странными кварковыми звездами (В противном случае квазипериодические осцилляции наблюдались бы на более низких частотах за счет большего значения параметра компактности для странных звезд.).

5. Получены выражения для смещения фазы частицы в нейтронном интерферометре, смещения фазы частицы в интерферометре типа Маха-Зендера в пространстве-времени с ненулевым бран-параметром. На основе полученных результатов и данных об экспериментах по интерферометрии частиц получен верхний предел на значение бран параметра. Недавно авторами [95] был найден верхний предел на значение модуля бран параметра в рамках Солнечной системы. Некоторые важные оценки возможного значения бран параметра, полученные из движения планет в Солнечной системе, также описаны в работе [95]. В работе [96] найдено такое же значение для модуля бран параметра из анализа стабильных круговых орбит в окрестности ЧД. В работе получен полный комплект значения для модуля бран параметра полученные из земных, солнечных и астрофизических данных.
6. Показано, что тепловое излучение Хокинга ЧД усиливается за счет бран параметра. В ранней Вселенной за счет флуктуаций плотного вещества были образованы мини ЧД. Астрономические наблюдения показывают их отсутствие на данной эпохе Вселенной. Это говорит о том, что вероятно величина бран параметра эволюционирует с течением времени и возможно модуль ее величины был достаточно большим в ранней эпохе, что привело к раннему распаду или непродолжительному периоду жизни мини ЧД.

## Литература

- [1] Morozova V.S., Ahmedov B.J., Abdujabbarov A.A., **Мамаджанов А.И.** Plasma Magnetosphere of Rotating Magnetized Neutron Star in the Braneworld // **Astrophys. Space Sci.** – 2010. – V. **330**. – P. 257-266.
- [2] **Мамаджанов А. И.**, Hakimov A.A., Tojiev S.R. Quantum Interference Effects in Spacetime of Slowly Rotating Compact Objects in Braneworld// **Modern Physics Letters A** – 2010. – V. **25** – P. 243-256.
- [3] **Мамаджанов А. И.** Тепловое излучение Хокинга в метрике медленно вращающегося компактного объекта на бранах// **Доклады АН РУз** – 2010. – No. **3**. – С. 41-45.
- [4] Abdujabbarov A.A., **Мамаджанов А.И.**, Rakhmatov A.S. The Blandford-Znajek and Penrose Mechanisms in Plasma Magnetospheres in Kerr-Taub-NUT Spacetime // **Вестник НУУз.** - Ташкент, 2009. - No. 2. - С. 79-86.
- [5] Абдужаббаров А.А., **Мамаджанов А.И.** Эффект Пенроуза в гравитационном поле компактного объекта с гравитомагнитным монополярным зарядом // **Ядерная физика и ядерные технологии: Сб. докл. в II Республиканской конференции молодых физиков Узбекистана 25-26 ноября 2008.** – Ташкент, 2008. – С. 237-240.
- [6] Абдужаббаров А.А., Рахматов А.С., Рафиева Э., **Мамаджанов А.И.** Движение частиц в окрестности компактных гравитационных объектов с НУТ параметром во внешнем магнитном поле // **Физика фанининг бугунги ривожиди истеъдодли ёшларнинг ўрни: Иктидорли талабалар ва ёш олимларнинг илмий-амалий конференцияси материаллари.** - Тошкент: Ўз МУ, 4-5 июнь 2008. – С. 3-8.

- [7] **Mamadjanov A.I.** Hawking Thermal radiation for Black Hole on Brane // Modern Problems of Nuclear Physics: Abs. Book of the Seventh International Conference 22-25 September 2009. – Tashkent, 2009. – P. 117-118.
- [8] **Мамаджанов А.И.**, Хакимов А.А., Морозова В.С. Эффекты квантовой интерференции в пространстве - времени медленно вращающегося объекта на бране// Современная физика и ее перспективы: Материалы республиканской конференции 12-13 ноября 2009. – Ташкент, 2009 . – С. 284-286.
- [9] Морозова В.С., Рахматов А.С., **Мамаджанов А.И.** Анизотропия скорости света в пространстве-времени Керр-Тауб-НУТ// Сб. докл. республиканской конференции молодых ученых. – 2008. – Ташкент. – С. 65.
- [10] **Мамаджанов А.И.** Внешние электромагнитные поля осциллирующей релятивистской нейтронной звезды// Актуальные проблемы современной физики: школа-семинар для одаренных студентов и молодых ученых 28-29 мая 2010. – Самарканд, 2010. – С. 28-33.
- [11] Тожиев С.Р., **Мамаджанов А.И.** Вакуумная звезда из темной энергии в однородном магнитном поле// Актуальные проблемы современной физики: школа-семинар для одаренных студентов и молодых ученых 28-29 мая 2010. – Самарканд, 2010. – С. 95-98.
- [12] **Мамаджанов А.И.** Затухание сфероидальных и тороидальных мод осцилляций намагниченной релятивистской звезды// Замоновий физика ва астрономиянинг долзарб муаммолари: Республика микёсидаги илмий-амалий конференция 14-май 2010. – Карши, 2010. – С. 132-133.
- [13] **Мамаджанов А.И.** Сфероидальные и радиальные осцилляции намагниченных нейтронных звезд // Ядерная физика и ядерные технологии: Сб. докл. в III Республиканской конференции молодых физиков Узбекистана 1-2 декабря 2010. – Ташкент, 2010. – С. 15–21.
- [14] Israel G. L., Belloni T., Stella L., Rephaeli Y., Gruber D. E., Casella P., Dall’Osso S., Rea N., Persic M., Rothschild R. E. The Discovery of Rapid

- X-Ray Oscillations in the Tail of the SGR 1806-20 Hyperflare // *Astrophys. J.* – 2005. – V. **628**. – P. L53-L56.
- [15] McDermott P.N., Savedoff M.P., van Horn H.M., Zweibel E.G., Hansen C.J. Electromagnetic damping of neutron star oscillations// *Astrophys. J.* – 1984. – V. **281**. – P. 746-750.
- [16] Muslimov A.G., Tsygan A.I. The neutron-star oscillations model for gamma-ray bursts// *Astrophys. Space Sci.* – 1986. – V. **120**. –P. 27-41.
- [17] Timokhin A.N., Bisnovatyi-Kogan G.S., Spruit H.C. The magnetosphere of an oscillating neutron star. Non-vacuum treatment// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2000. – V. **316** – P. 734-748.
- [18] Rezzolla L., Ahmedov B.J., Miller J.C. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2001. – V. **322**. – P. 723-740.
- [19] Overhauser A.W., Colella R. Experimental Test Of Gravitationally Induced Quantum Interference// *Phys. Rev. Lett.* – 1974. – V. **33**. – P. 1237-1239.
- [20] Colella R., Over Hauser A.W., Werner S.A. Observation of Gravitationally Induced Quantum Interference// *Phys. Rev. Lett.* – 1975. – V. **34**. – P. 1472-1474.
- [21] Nesvizhevsky V.V., Börner H.G., Gagarski A.M., Petoukhov A.K. Measurement of quantum states of neutrons in the Earth’s gravitational field// *Phys. Rev. D* – 2003. – V. **67**. – P. 102002.
- [22] Nordström G. On the possibility of a unification of the electromagnetic and gravitational fields // *Zeits. Phys.* – 1914. – V. **15**. – P. 504-525.
- [23] Randall L., Sundrum R. An Alternative to Compactification// *Phys. Rev. Lett.* – 1999. – V. **83**. – P. 4690-4693.
- [24] Mereghetti S., Stella L., Israel G.L. Recent results on the anomalous X-ray pulsars // *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.* – 1999. – V. **69**. – P. 253-256.

- [25] Mereghetti S., Israel G.L., Stella L. The discovery of 8.7 S pulsations from the ultrasoft X-ray source 4U0142+61 // *Advances in Space Research.* – 1997. – V. **19** – P. 41-44.
- [26] Kouveliotou Ch. Magnetars // *Proc. Nat. Acad. of Sciences of the USA* – 1999. – V. **96**. – P. 5351-5352.
- [27] Thompson C., Duncan R.C. The soft gamma repeaters as very strongly magnetized neutron stars - I. Radiative mechanism for outbursts// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1995. – V. **275**. – P. 255-300.
- [28] Bonanno A., Rezzolla L., Urpin V. Mean-field dynamo action in protoneutron stars// *Astron. & Astrophys.* – 2003. – V. **410**. – P. 33-36.
- [29] Ginzburg V.L., Ozernoy L. M. On gravitational collapse of magnetic stars // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* – 1964. – V. **47**. – P. 1030-1040.
- [30] Anderson J.L., Cohen J.M. Gravitational Collapse of Magnetic Neutron Stars// *Astrophys. Space Sci.* – 1970. – V. **9**. – P. 146-152.
- [31] Muslimov A.G., Tysgan A.I. General relativistic electric potential drops above pulsar polar caps// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1992. – V. **255**. – P. 61-70.
- [32] Muslimov A.G., Harding A.K. Toward the Quasi-Steady State Electrodynamics of a Neutron Star// *Astrophys. J.* – 1997. – V. **485**. – P. 735.
- [33] Konno K., Kojima Y. General Relativistic Modification of a Pulsar Electromagnetic Field// *Prog. Theor. Phys.* – 2000. – V. **104**. – P. 1117-1127.
- [34] Rezzolla L., Ahmedov B.J., Miller J.C. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star - I. Formulation of the equations// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2003. – V. **338**. – P. 816-831.

- [35] Rezzolla L., Ahmedov B.J., Miller J.C. Stationary electromagnetic field of slowly rotating magnetized neutron star in general relativity// *Found. Phys.* – 2001. – V. **31**. – P. 1051-1065.
- [36] Kojima Y., Matsunaga N., Okita T. Stationary electromagnetic field in the exterior of a slowly rotating relativistic star: a description beyond the lowfrequency approximation.// *Mon. Not. R. Astron. Soc.*. – 2004. – V. **348**. – P. 1388-1394.
- [37] Abdikamalov E. B., Ahmedov B. J., Miller J. C. The magnetosphere of oscillating neutron stars in general relativity // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2009. – V. **395**. (N. 10). – P. 443-461.
- [38] Morozova V. S., Ahmedov B. J. and Zanotti O. General Relativistic Magnetospheres of Slowly Rotating and Oscillating Magnetized Neutron Stars// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2010. – V. **408**– P. 490–502.
- [39] Ahmedov B.J., Morozova V.S. Plasma Magnetosphere Formation Around Oscillating Magnetized Neutron Stars// *Astrophysics and Space Science.* – 2009. – Vol. **319**. – P.115-117.
- [40] Pacini F. Rotating Neutron Stars, Pulsars and Supernova Remnants// *Nature* – 1968. – V. **219**. – P. 145-146
- [41] Gunn E.J., Ostriker J.P. On the Nature of Pulsars. I. Theory// *Astrophys. J.* – 1969. – V. **157** – P. 1395.
- [42] Shapiro S.L., Teukolsky S.A. Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The physics of compact objects// Research supported by the National Science Foundation. New York, Wiley-Interscience – 1983. – P. 663.
- [43] Konno K., Obata T., Kojima Y. Deformation of relativistic magnetized stars // *Astron. & Astrophys.* – 1999. – V. **352**. – P. 111-116.
- [44] Oron A. Relativistic magnetized star with poloidal and toroidal fields// *Phys. Rev. D* – 2002. – V. **66**. – P. 023006.

- [45] Ioka K., Sasaki M. Relativistic Stars with Poloidal and Toroidal Magnetic Fields and Meridional Flow // *Astrophys. J.* – 2004. – V. **600** – P. 296-316.
- [46] Geppert U., Page D., Zannias T. Magnetic field decay in neutron stars: Analysis of general relativistic effects// *Phys. Rev. D* – 2000. – V. **61**. – P. 123004.
- [47] Zanotti O., Rezzolla L. General relativistic electromagnetic fields of a slowly rotating magnetized neutron star - II. Solution of the induction equations// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2002. – V. **331**. – P. 376-388.
- [48] Shapiro S.L., Teukolsky S.A. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars*. Wiley, New York – 1983.
- [49] Thorne K.S., Price R.H., Macdonald D.A. *Black holes: The membrane paradigm*. New Haven, CT, Yale University Press., 1986.
- [50] Rezzolla L., Ahmedov B.J. Electromagnetic field in the exterior of an oscillating relativistic star - I. General expressions and application to rotating magnetic dipole// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2004. – V. **352**. – P. 1161-1179.
- [51] Messios N., Papadopoulos D.B., Stergioulas N. Torsional oscillations of magnetized relativistic stars// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2001. – Vol. **328**. – P. 1161-1168.
- [52] Bouwkamp C.J., Casimir H.B.G. On multipole expansions in the theory of electromagnetic radiation.// *Physica* – 1954. – V. **20**. – P. 539-554.
- [53] Chandrasekhar S. *The Mathematical Theory of Black Holes* New York : Oxford University Press – 1992.
- [54] Malec E., Murchadha N.O., Chmaj T. Spherical scalar waves and gravity - redshift and backscattering// *Class. Quantum Grav.* –1998. – V. **15** – P. 1653.

- [55] Casimir H.B.G. A Note on multipole radiation // *Helv. Phys. Acta.* – 1960. – V. **33**. – P. 849-854.
- [56] Arfken G.B., Weber H.J. *Mathematical Methods for Physicists*, 5th edn. - San Diego.: Academic Press., 2001.
- [57] Zanotti O., Rezzolla L. General Relativistic Electromagnetic Fields of A Slowly Rotating Magnetized Neutron Star-II. Solution of the induction equations// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2002. – V. **331** – P. 376-388.
- [58] Deutsch A.J. The electromagnetic field of an idealized star in rigid rotation in vacuo// *Annales d’Astrophysique* – 1955. – V. **18**. – P. 1-15.
- [59] Hartle J.B., Thorne K.S. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars// *Astrophys. J.* – 1968. – V. **153**. – P. 807.
- [60] Stute M., Camenzind M. Towards a self-consistent relativistic model of the exterior gravitational field of rapidly rotating neutron stars // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2002. – V. **336**. – P. 831-840.
- [61] Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H. *Nonradial oscillations of stars*. Tokyo: University of Tokyo Press, 1989, 2nd ed., 1989.
- [62] Friedman J.L., Morsink S.M. Instabilities, Relativity, Stars: Oscillations, Stars: Rotation// *Astrophys. J.* – 1998. – V. **502**. – P. 714.
- [63] Dunkan D.K. Undergraduate Teaching: Members’ Experiences and Research Results Introduction // *American Astronomical Society* – 1998. – V. **30**. – P. 1334.
- [64] Hansen C.J., Cioffi D.F. Torsional oscillations in neutron star crusts// *Astrophys. J.* – 1980. – V. **238**. – P. 740-742.
- [65] Clemens J.Ch., Rosen R. Observations of Nonradial Pulsations in Radio Pulsars // *Astrophys. J.* – 2004. – V. **609**. – P. 340-353.

- [66] Page D., Geppert U., Zannias T. General relativistic treatment of the thermal, magnetic and rotational evolution of isolated neutron stars with crustal magnetic fields// *Astron. Astrophys. J.* – 2000. – V. **360**. – P. 1052-1066.
- [67] McDermott P.N., Van Horn H.M., Hansen C.J. Nonradial oscillations of Neutron Stars// *Astrophys. J.* – 1988. – V. **325**. – P. 725-748.
- [68] Landau L.D., Lifshitz E.M. *The Classical Theory of Fields*, 4th ed., Pergamon Press, Oxford., 1987.
- [69] Dadhich N.K., Maartens R., Papodopoulos P., Rezanian V. Black holes on the brane// *Phys. Lett. B* – 2000. – V. **487**. – P. 1-6.
- [70] Maartens R. Brane-World Gravity// *Living Rev. Relativity* – 2004. – V. **7**. – P. 7.
- [71] Stuchlik Z., Kotrlová A. Orbital resonances in discs around braneworld Kerr black hole// *Gen. Rel. Grav.* – 2009. – V. **41**. – P. 1305-1343.
- [72] Kotrlová A., Stuchlik Z., Török G. Quasiperiodic oscillations in a strong gravitational field around neutron stars testing braneworld models// *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. – P. 225016
- [73] Turimov B.V., Ahmedov B.J., Abdujabbarov A.A. Electromagnetic Fields of Slowly Rotating Magnetized Gravastars// *Mod. Phys. Lett. A* – 2009. – V. **24** – P. 733-737.
- [74] Page L.A. Effect of Earth's Rotation in Neutron Interferometry// *Phys. Rev. Lett.* – 1975. – V. **35**. – P. 543.
- [75] Werner S.A., Staudenmann J.L., Colella R. Effect of Earth's Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron// *Phys. Rev. Lett.* – 1979. – V. **42**. – P. 1103-1106.
- [76] Mashhoon B., Hehl F.W., Theiss D.S. On the gravitational effects of rotating masses-The Thirring-Lense Papers// *Gen. Rel. Grav.* – 1984. – V. **16**. – P. 711-750.

- [77] Iakubovskiy D., Shtanov Yu. Braneworld cosmological solutions and their stability // *Class. Quantum Grav.* – 2005. – V. **22**. – N. 12. – P. 2415-2432.
- [78] Majumdar A. S., Mukherjee N. Braneworld Black Holes in Cosmology and Astrophysics // *Int. J. Mod. Phys. D* – 2005. – V. **14**. – P. 1095-1129.
- [79] Gergely L. A. Brane-world cosmology with black strings // *Phys. Rev. D* – 2006. – V. **74**. – P. 024002.
- [80] Maeda H., Sahni V., Shtanov Yu. Braneworld dynamics in Einstein-Gauss-Bonnet gravity // *Phys. Rev. D*. – 2007. – V. **76**. – N. 10. – P. 104028.
- [81] Shtanov Yu., Viznyuk A., Granda L. N. Asymmetric Embedding in Brane Cosmology // *Mod. Phys. Lett. A*. – 2008. – V. **23**. – N. 12. – P. 869-878.
- [82] Kuroiwa J., Kasai M., Futamase T. A treatment of general relativistic effects in quantum interference// *Phys. Lett. A*. – 1993. – V. **182**. – P. 330-334.
- [83] Rizzi G., Ruggiero M.L., Serafini A. Synchronization Gauges and the Principles of Special Relativity// *Foundations of Physics* – 2004. – V. **34**. – P. 1835-1887.
- [84] Rizzi G., Ruggiero M.L. A Direct Kinematical Derivation of the Relativistic Sagnac Effect for Light or Matter Beams// *Gen.Rel. Grav.* –2003. – V. **35**. – P. 2129-2136.
- [85] Ruggiero M.L. The Sagnac effect in curved space-times from an analogy with the Aharonov-Bohm effect// *Gen. Rel. Grav.* – 2005. – V. **37**. – P. 1845-1855.
- [86] Arminjon M., Reifler F. Quantum mechanics for three versions of the Dirac equation in a curved spacetime// e-print, arXiv:0810.0671.
- [87] Morozova V.S., Ahmedov B.J. Quantum Interference Effects in Slowly Rotating NUT Space-time // *Int. J. Mod. Phys. D* – 2009. – V. **18**. – P. 107-118.
- [88] Aliev A.N., Gümrukçüoğlu A.E. Charged rotating black holes on a 3-brane// *Phys. Rev. D* – 2005. – V. **71**. – P. 104027.

- [89] Kagramanova V., Kuntz J., Lämmerzahl C. Charged particle interferometry in Plebański Demiański black hole spacetimes// *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. – pp. 105023.
- [90] Abdujabbarov A.A., Ahmedov B.J., Kagramanova V.G. Particle motion and electromagnetic fields of rotating compact gravitating objects with gravitomagnetic charge// *Gen. Rel. Grav.* – 2008. – V. **40**. – P. 2515-2532.
- [91] Konoplya R.A. Magnetized black hole as a gravitational lens// *Phys. Lett. B* – 2007. – V. **644** – P. 219-223.
- [92] Konoplya R.A. Particle motion around magnetized black holes: Preston-Poisson space-time// *Phys. Rev. D* – 2006. – V. **74**. – P. 124015.
- [93] Dimopoulos S., Graham P.W., Hogan J.M., Kasevich M.A. General relativistic effects in atom interferometry// *Phys. Rev. D* – 2008. – V. **78**. – P. 042003.
- [94] Ruggiero M.L. The Sagnac effect in curved space-time from an analogy with the Aharonov-Bohm effect// *Gen. Rel. Grav.* – 2005. – V. **37**. – P. 1845-1855.
- [95] Böhmer C.G., Harko T., Lobo F. S. N. Solar system test of the braneworld model// *Class. Quantum Grav.* – 2008. – V. **25**. – P. 045015.
- [96] Abdujabbarov A.A., Ahmedov B.J. Test particle motion around a black hole in a braneworld// *Phys. Rev. D* – 2010. – V. **81**. – P. 044022.
- [97] Jalalzadeh S., Mehrnia M., Sepangi H. R. Classical tests in brane gravity// *Class. Quantum Grav.* – 2009. – V. **26**. – P. 155007.
- [98] Maldacena J. M. Branes probing black holes. // *Nuc. Phys. B Proc. Supp.* – 1998. – V. **68**. – P. 17-27.
- [99] Gubser S.S., Klebanov I.R., Polyakov A. M. Gauge theory correlators from non-critical string theory // *Physics Letters B* – 1998. – V. **428**. – P. 105-114.

- [100] Witten E. Baryons and branes in anti de Sitter space // J. High Energy Phys. – 1998. – V. **2**. – P. 007.
- [101] Tangherlini F.R. Electromagnetic solutions of higher-dimensional gravity // Nuovo Cimento – 1963. – V. **27**. – P. 636.
- [102] Myers R.C., Perry M.J. The Vaidya solution in higher dimensions // Ann. Phys. – 1986. – V. **172**. – P. 304.
- [103] Aliev A. N. Rotating black holes in higher dimensional Einstein-Maxwell gravity// Phys. Rev. D – 2006. – V. **74**. – id. 024011
- [104] Aliev A. N. Electromagnetic properties of Kerr anti-de Sitter black holes// Phys. Rev. D – 2007. – V. **75**. – id. 084041.
- [105] Aliev A. N. Gyromagnetic ratio of charged Kerr anti-de Sitter black holes// Class. Quantum Grav. – 2007. – V. **24**. – P. 4669-4677.
- [106] Cvetič M., Youm D. Entropy of nonextreme charged rotating black holes in string theory// Phys. Rev. D – 1996. – V. **54**. – P. 2612-2620.
- [107] Cvetič M., Youm D. Black holes and solitons in string theory// Physics Reports – 1999. – V. **316**. – P. 224-232.
- [108] Cvetič M., Youm D. Near-BPS-saturated rotating electrically charged black holes as string states// Nucl. Phys. B – 1996. – V. **477**. – P. 449-461.
- [109] Cvetič M., Youm D. General rotating five-dimensional black holes of toroidally compactified heterotic string// Nucl. Phys. B – 1996. – V. **476**. – P. 118-132.
- [110] Chong Z.W., Cvetič M., Lü H., Pope C.N. Five-dimensional gauged supergravity black holes with independent rotation parameters// Phys. Rev. D – 2005. – V. **72**. – P. 041901.
- [111] Chong Z.W., Cvetič M., Lü H., Pope C.N. General Nonextremal Rotating Black Holes in Minimal Five-Dimensional Gauged Supergravity// Phys. Rev. Lett. – 2005. – V. **95**. – P. 161301

- [112] Hawking S.W. Black hole explosions?// Nature – 1974. – V. **248**. – P. 30-31.
- [113] Parikh M.K., Wilchek F. Hawking Radiation As Tunneling// Phys. Rev. Lett. – 2000. – V. **85**. – P. 5042-5045.
- [114] Hemming S., Keski-Vakkuri E. Hawking radiation from ADS Black holes// Phys. Rev. D – 2001. – V. **64**. – P. 044006.
- [115] Medved A.J. Radiation via tunneling from a de Sitter cosmological horizon// Phys. Rev. D – 2002. – V. **66**. – P. 124009.
- [116] Blandford R.D., Znajek R.L. Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes// Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1977. – V. **179**. – P. 433-456.
- [117] Damour T., Ruffini R., Hanni R.S., Wilson J.R. Regions of magnetic support of a plasma around a black hole// Phys. Rev. D – 1978. – V. **17**. – P. 1518-1523.
- [118] Thorne K.S., Price R.H., MacDonald D.A. Book-Review - Black-Holes - the Membrane Paradigm// Science – 1986. – V. **234**. – P. 224.
- [119] Weber E.J., Davis L.J. The Angular Momentum of the Solar Wind// Astrophys. J. – 1967. – V. **148**. – P. 217.
- [120] Wald R.M. Black hole in a uniform magnetic field// Phys. Rev. D – 1974. – V. **10**. – P. 1680-1685.
- [121] King A.R., Lasota J.P., Kundt W. Black holes and magnetic fields// Phys. Rev. D – 1975. – V. **12**. – P. 3037-3042.
- [122] Bicak J., Janis V. Magnetic fluxes across black holes// Mon. Not. R. Astron. Soc. – 1985. – V. **212**. – P. 899-915.
- [123] Katz J., Lynden-Bell D., Bicak J. Gravitational energy in stationary spacetimes// Class. Quantum Grav. – 2006. – V. **23**. – P. 7111-7127.

- [124] Abdil'din M. M., Abishev M. E., Beissen N. A., Brisheva Zh. N. On the uniqueness problem for the Lagrangian of two rotating bodies in general relativity // *Gravit. Cosmology* – 2009. – V. **15** Iss. 2, – P. 141-143.
- [125] Abdil'din M. M., Abishev M. E., Beissen N. A., Boshkaev K. A. On the uniqueness problem for the metric of the first approximation in general-relativistic mechanics // *Gravit. Cosmology* – 2009. – V. **15** Iss. 1, – P. 1-4.
- [126] Maraschi L., Treves A., Tarenghi M. Accretion by Neutron Stars at the Galactic Center// *Astron. & Astrophys.* – 1973. – V. **25**. – P. 153.
- [127] Hong-Lin L., Zi-Xiang L. A New Method to Study the Hawking Radiation from the Kerr-NUT Black Hole // *Int. J. Theor. Phys.* – 2008. – V. **47**. – P. 2960-2965.
- [128] Komissarov S. S. General relativistic magnetohydrodynamic simulations of monopole magnetospheres of black holes// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 2004. – V. **350**. – P. 1431-1436.
- [129] MacDonald D., Thorne K.S. Black-hole electrodynamics - an absolute-space/universal-time formulation// *Mon. Not. R. Astron. Soc.* – 1982. – V. **198**. – P. 345-382.
- [130] Punsly B., Coroniti F.V. Ergosphere-driven winds// *Astrophys. J.* – 1990. – V. **354**. – P. 583-615.
- [131] Koide Sh. Magnetic extraction of black hole rotational energy: Method and results of general relativistic magnetohydrodynamic simulations in Kerr space-time// *Phys. Rev. D* – 2003. – V. **67**. – P. 104010.
- [132] Angheben M., Nadalini M., Vanzo L., Zerbini S. Hawking radiation as tunnelling for extremal and rotating black holes// *J. High Energy Phys.* – 2005. – V. – P. 014.

# Приложения

## А. Производные от функции Лежандра

В этом приложении мы вкратце рассмотрим длинную, но простую алгебру необходимую для вычислений  $Q_{\ell m}$  и их радиальных производных, которая используется при вычислении электрического поля в ближней зоне. Используя рекуррентную формулу.

$$(x^2 - 1) \frac{dQ_\ell}{dx} = \ell (xQ_\ell - Q_{\ell-1}) , \quad (\text{A.1})$$

$$(\ell + 1) Q_{\ell+1} - (2\ell + 1) xQ_\ell + \ell Q_{\ell-1} = 0 \quad (\text{A.2})$$

где  $x \equiv 1 - r/M$ , можно показать, что радиальная производная второго порядка от функции Лежандра второго рода принимает вид

$$\frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] = \frac{\ell}{(x-1)^2} \{ [(x-1)\ell - 1] Q_\ell + Q_{\ell-1} \} . \quad (\text{A.3})$$

Тогда, выражения, содержащиеся в компонентах электрического поля (2.12)–(2.14) можно просто записать так

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] \right\} &= -M \frac{d}{dx} \left\{ (x-1)^2 \frac{d}{dx} \left[ (1+x) \frac{dQ_\ell}{dx} \right] \right\} = \\ &= -\frac{M\ell^2(\ell+1)}{(x+1)} (xQ_\ell - Q_{\ell-1}) . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

## В. Вычисление константы возмущения $\partial_t \delta s_{\ell m}$

Подставляя в (1.72) величину магнитного поля (1.47)–(1.49) на поверхности звезды

$$B_R^{\hat{r}} = -\frac{1}{R^2} \Delta_\Omega S|_{r=R} , \quad B^{\hat{\theta}} = \frac{N_R}{R} \partial_\theta \partial_r S|_{r=R} , \quad B^{\hat{\phi}} = \frac{N_R}{R \sin \theta} \partial_\phi \partial_r S|_{r=R} \quad (\text{B.1})$$

и используя выражение (1.57), можно получить, что

$$\begin{aligned} \partial_t \delta S_{\ell m} Y_{\ell m} |_{r=R} = & \frac{1}{\ell(\ell+1)} \left\{ \Delta_{\Omega} S \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \partial_{\theta} \left( \sin \theta \delta v^{\hat{\theta}} \right) + \partial_{\phi} \delta v^{\hat{\phi}} \right] \right. \\ & + \left[ N_R \partial_r (\Delta_{\Omega} S) \delta v^{\hat{r}} + \frac{1}{R} \partial_{\theta} (\Delta_{\Omega} S) \delta v^{\hat{\theta}} \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{R \sin \theta} \partial_{\phi} (\Delta_{\Omega} S) \delta v^{\hat{\phi}} \right] + N_R \left[ \partial_{\theta} \partial_r S \partial_{\theta} \delta v^{\hat{r}} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\phi} \partial_r S \partial_{\phi} \delta v^{\hat{r}} \right] \right\} \Big|_{r=R}, \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

где  $\Delta_{\Omega}$  – угловая часть Лапласиана, *i. e.*

$$\Delta_{\Omega} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\theta} (\sin \theta \partial_{\theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\phi}^2. \quad (\text{B.3})$$

Интересно заметить, что в пределе плоского пространства-времени наше выражение (B.2) совпадает с уравнением (B2) Timokhin et al. 2000, которое было получено при требовании непрерывности тангенциального электрического поля на поверхности звезды. Умножив это выражение на  $Y_{\ell m}^*$ , интегрируя его по телесному углу и используя уравнение (1.68), мы можем в итоге получить выражение для коэффициентов  $\partial_t(\delta S_{\ell m})$  в разложении  $\delta S$  в сферической гармонике

$$\begin{aligned} \partial_t(\delta S_{\ell m}) |_{r=R} = & \frac{\ell}{M} \left\{ - \left( 1 + \frac{R}{M} \ell \right) Q_{\ell} + Q_{\ell-1} \right\} \Big|_{r=R} \partial_t \delta s_{\ell m}(t) = \\ & \frac{1}{\ell(\ell+1)} \int d\Omega Y_{\ell m}^* \left\{ \Delta_{\Omega} S \frac{1}{R \sin \theta} \left[ \partial_{\theta} \left( \sin \theta \delta v^{\hat{\theta}} \right) + \partial_{\phi} \delta v^{\hat{\phi}} \right] \right. \\ & + \left[ N_R \partial_r (\Delta_{\Omega} S) \delta v^{\hat{r}} + \frac{1}{R} \partial_{\theta} (\Delta_{\Omega} S) \delta v^{\hat{\theta}} + \frac{1}{R \sin \theta} \partial_{\phi} (\Delta_{\Omega} S) \delta v^{\hat{\phi}} \right] \\ & \left. + N_R \left[ \partial_{\theta} \partial_r S \partial_{\theta} \delta v^{\hat{r}} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_{\phi} \partial_r S \partial_{\phi} \delta v^{\hat{r}} \right] \right\} \Big|_{r=R}. \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

## С. Различные приближения к гравитационному красному смещению

Здесь мы представляем довольно различное дифференцирование хорошо известного результата, что фотоны в гравитационном потенциале подвергаются гравитационному красному смещению. Чтобы сделать это мы исполь-

зуем наличие в этом пространстве-времени времениподобного вектора Киллинга  $\xi^\alpha$  так чтобы

$$\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha} = 0 . \quad (\text{C.1})$$

Электромагнитные волны распространяются вдоль геодезических и связаны с нулевым волновым вектором  $k^\alpha$ , касательным к этим траекториям и движущихся параллельно им *m.e.*

$$k^\alpha{}_{;\beta} k^\beta = 0 . \quad (\text{C.2})$$

Теперь введем две важные частоты: первая – частота, измеряемая наблюдателем с 4-скоростью  $u^\alpha$  и определяемая так:

$$\omega \equiv -k^\alpha u_\alpha , \quad (\text{C.3})$$

вторая – частота, связанная с времениподобным вектором Киллинга  $\xi^\alpha$  и определяемая так:

$$\omega_\xi \equiv -k^\alpha \xi_\alpha . \quad (\text{C.4})$$

Эти две частоты имеют значительные отличия: (C.3) зависит от выбранного наблюдателя и поэтому является функцией положения, а (C.4) – сохраняющаяся величина и постоянна вдоль траектории движения электромагнитных волн. Это легко проверить используя уравнения (C.1) и (C.2), которые дают

$$(k^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} k^\beta = (k^\alpha \xi_\alpha)_{;\beta} k^\beta = k^\alpha{}_{;\beta} k^\beta \xi_\alpha + \xi_{\alpha;\beta} k^\alpha k^\beta = 0 . \quad (\text{C.5})$$

Мы можем использовать это свойство для измерения изменения частоты с изменением положения, поэтому частота претерпевает красное смещение в пространстве-времени (1.2). Примем следующие компоненты вектора Киллинга

$$\xi^\alpha \equiv \left( 1, 0, 0, 0 \right) ; \quad \xi_\alpha \equiv N^2 \left( -1, 0, 0, 0 \right) , \quad (\text{C.6})$$

*m.e.*  $\omega_\xi = k_0 = \text{const}$ . Частота электромагнитных волн, излучаемых с поверхности звезды  $r = R$ , и измеренная наблюдателем с 4-скоростью  $u^\alpha$  параллельной  $\xi^\alpha$  (*m.e.* статический наблюдатель) будет равна

$$\omega_R = -(k_\alpha u^\alpha)|_{r=R} = N_R^{-1} \omega_\xi , \quad (\text{C.7})$$

т.е. для общего радиального положения  $r$

$$N(r)\omega(r) = \text{const.} = N_R\omega_R . \quad (\text{C.8})$$

Это выражение совпадает с уравнением (1.89) в тексте.

## Д. Уравнения Максвелла во вращающемся пространстве-времени

Если пространство-время допускает использование вращательного три-вектора Киллинга  $\vec{\beta}$ , то систему уравнений Максвелла можно записать так ([49], [34], [35])

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 , \quad (\text{D.1})$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi\rho_e , \quad (\text{D.2})$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\vec{B} = -\vec{\nabla} \times (N\vec{E}) , \quad (\text{D.3})$$

$$(\partial_t - \mathcal{L}_{\vec{\beta}})\vec{E} = -\vec{\nabla} \times (N\vec{B}) - 4\pi\vec{J} , \quad (\text{D.4})$$

где, опять,  $\vec{\nabla}$  – ковариантная производная относительно пространственной части метрики, и  $\mathcal{L}_{\vec{\beta}}$  – производная Ли вдоль  $\vec{\beta}$ . Система уравнений (D.1)–(D.4) законом Ома, принимающем общую форму:

$$\vec{J} = \vec{j} + \sigma \left[ \vec{E} + (\vec{v} + \vec{\beta}) \times \vec{B} \right] . \quad (\text{D.5})$$

Нетрудно вычислить производную Ли от три-вектора  $\vec{A}$  вдоль векторного поля  $\vec{\beta}$ . Но форму ее компонент в пространстве-времени с линейным элементом (1.2) не просто найти в литературе. По этой причине мы приводим их

здесь в качестве полезной справки.

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_{\beta}\vec{A}\right)^{\hat{r}} &= e^{-\Lambda}\beta^{\hat{r}}\partial_r A^{\hat{r}} + \frac{\beta^{\hat{\theta}}}{r}\partial_{\theta}A^{\hat{r}} + \\ &\frac{\beta^{\hat{\phi}}}{r\sin\theta}\partial_{\phi}A^{\hat{r}} - e^{-\Lambda}A^{\hat{r}}\partial_r\beta^{\hat{r}} - \frac{A^{\hat{\theta}}}{r}\partial_{\theta}\beta^{\hat{r}} - \frac{A^{\hat{\phi}}}{r\sin\theta}\partial_{\phi}\beta^{\hat{r}} , \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_{\beta}\vec{A}\right)^{\hat{\theta}} &= e^{-\Lambda}\beta^{\hat{r}}\partial_r A^{\hat{\theta}} + \frac{\beta^{\hat{\theta}}}{r}\partial_{\theta}A^{\hat{\theta}} + \\ &\frac{\beta^{\hat{\phi}}}{r\sin\theta}\partial_{\phi}A^{\hat{\theta}} - e^{-\Lambda}A^{\hat{r}}\partial_r\beta^{\hat{\theta}} - \frac{A^{\hat{\theta}}}{r}\partial_{\theta}\beta^{\hat{\theta}} - \frac{A^{\hat{\phi}}}{r\sin\theta}\partial_{\phi}\beta^{\hat{\theta}} + e^{-\Lambda}\frac{A^{\hat{r}}\beta^{\hat{\theta}} - A^{\hat{\theta}}\beta^{\hat{r}}}{r} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{L}_{\beta}\vec{A}\right)^{\hat{\phi}} &= e^{-\Lambda}\beta^{\hat{r}}\partial_r A^{\hat{\phi}} + \frac{\beta^{\hat{\theta}}}{r}\partial_{\theta}A^{\hat{\phi}} + \\ &\frac{\beta^{\hat{\phi}}}{r\sin\theta}\partial_{\phi}A^{\hat{\phi}} - e^{-\Lambda}A^{\hat{r}}\partial_r\beta^{\hat{\phi}} - \frac{A^{\hat{\theta}}}{r}\partial_{\theta}\beta^{\hat{\phi}} - \frac{A^{\hat{\phi}}}{r\sin\theta}\partial_{\phi}\beta^{\hat{\phi}} + e^{-\Lambda}\frac{A^{\hat{r}}\beta^{\hat{\phi}} - A^{\hat{\phi}}\beta^{\hat{r}}}{r} \\ &+ \frac{A^{\hat{\theta}}\beta^{\hat{\phi}} - A^{\hat{\phi}}\beta^{\hat{\theta}}}{r}\cot\theta . \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

Если производная Ли теперь берётся вдоль вращающегося вектора Киллинга

$$\vec{\beta} = \frac{1}{2r\sin\theta}g_{t\phi}\mathbf{e}_{\phi} = -\omega r\sin\theta\mathbf{e}_{\phi} , \quad (\text{D.9})$$

как для пространства-времени быстровращающейся релятивистской звезды, то выражения (D.6)-(D.8) приводятся к следующему

$$\left(\mathcal{L}_{\beta}\vec{A}\right)^{\hat{r}} = -\omega\partial_{\phi}A^{\hat{r}} , \quad (\text{D.10})$$

$$\left(\mathcal{L}_{\beta}\vec{A}\right)^{\hat{\theta}} = -\omega\partial_{\phi}A^{\hat{\theta}} , \quad (\text{D.11})$$

$$\left(\mathcal{L}_{\beta}\vec{A}\right)^{\hat{\phi}} = A^{\hat{r}}e^{-\Lambda}\sin\theta\partial_r\omega - \omega\partial_{\phi}A^{\hat{\phi}} . \quad (\text{D.12})$$

## Е. Полезное приложение: вращающийся магнитный диполь

В данном параграфе будет обсуждаться приложение выражений, полученных в параграфах 1.4 и 1.5 к случаю, часто обсуждаемому в астрофизике,

когда массивный магнитный диполь, вращаясь в вакууме, генерирует электромагнитные поля и соответствующие потери энергии системы. Несмотря на то, что данная простая модель является идеализацией, она широко используется для получения первоначального качественного описания явлений, имеющих место в физике пульсаров. Выражения для электромагнитных полей и потерь энергии путем дипольного электромагнитного излучения были получены в рамках ньютоновского формализма очень давно ([40]) и до настоящего момента не были распространены на случай ОТО. Эта сложная задача, однако, может иметь достаточно простое решение в рамках вышеизложенного формализма, если разбить ее на две задачи нахождения электромагнитных полей в ближней и волновой зоне, при условии идеально проводящей поверхности звезды, движение которой описывается полем скоростей

$$\delta u^\alpha = \frac{1}{N} \left( 1, 0, 0, \Omega \right), \quad (\text{E.1})$$

соответствующие компоненты 3-скорости которой равны

$$\delta v^{\hat{i}} \equiv \left( 0, 0, \Omega r \sin \theta \right), \quad (\text{E.2})$$

где  $r \leq R$ , а  $\Omega$  – угловая скорость вращения звезды, измеряемая удаленным наблюдателем.

Так как выражение (E.1) для скорости является осесимметричным, оно не будет генерировать возмущения первого порядка в ближней и волновой зонах, если ось магнитного диполя совпадает с осью вращения звезды. Однако, если между осью магнитного поля и осью вращения звезды существует ненулевой угол  $\chi$ , поле скоростей будет вводить временную зависимость в выражения для компонент магнитного и электрического полей в ближней зоне и вызывать генерацию электромагнитных волн в волновой зоне. Получаемые вариации могут быть сравнены с выражениями для электромагнитного поля вращающейся намагниченной релятивистской звезды, представленными в литературе ([33]-[35]), что послужит хорошей проверкой разработанного в данной главе формализма. Но перед тем, как сделать это, необходимо получить выражения для статического фонового дипольного магнитного поля, пользуясь общими формулами (1.69)–(1.71).

## Фоновое магнитное поле в ближней зоне неподвижного диполя

В данном параграфе будут обсуждаться свойства дипольного фонового магнитного поля звезды с использованием общих формул (1.69)–(1.71) для случая  $\ell = 1$ , тогда как индекс  $m$  будет принимать ненулевые значения, что позволит исследовать важный вопрос нарушения аксиальной симметрии. Будет рассматриваться случай, когда характерное время изменения магнитного поля диполя значительно больше, чем период осцилляций, так что его можно считать статичным. В этом случае скалярные функции  $S_{1m}$  в (1.68) не зависят от времени и могут быть легко найдены в виде

$$S_{1m}(r) = \frac{r^2}{2M^3} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] s_{1m}, \quad (\text{E.3})$$

с использованием выражения для функции Лагранжа второго рода

$$Q_1 = \frac{x}{2} \ln \left( \frac{x+1}{x-1} \right) - 1. \quad (\text{E.4})$$

Подставляя (E.3) в уравнения (1.69)–(1.71), можно получить компоненты фонового магнитного поля в ближней зоне в следующем виде:

$$B^{\hat{r}} = \frac{1}{M^3} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] s_{1m} Y_{1m} = \left[ \sqrt{2} s_{10} \cos \theta - \Re (s_{11} e^{i\phi}) \sin \theta \right] \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{1}{M^3} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right], \quad (\text{E.5})$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{N}{M^2 r} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] s_{1m} \partial_{\theta} Y_{1m} = - \left[ \sqrt{2} s_{10} \sin \theta + \Re (s_{11} e^{i\phi}) \cos \theta \right] \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{N}{M^2 r} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right], \quad (\text{E.6})$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{N}{M^2 r \sin \theta} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] s_{1m} \partial_{\phi} Y_{1m} = - \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{N}{M^2 r} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] \left[ \Re (i s_{11} e^{i\phi}) \right], \quad (\text{E.7})$$

где выбрано условие  $s_{1m} = 0$  для  $m < 0$ , а  $\Re(A)$  означает вещественную часть  $A$ .

Выражения (E.5)–(E.7) представляют собой общий вид релятивистских компонент вакуумного магнитного поля в ближней зоне компактной сферической звезды, при условии, что поле имеет дипольную конфигурацию. Чтобы полностью их определить, необходимо найти коэффициенты  $s_{1m}$ , которые могут быть вычислены с использованием соответствующих граничных условий на поверхности звезды. Как было замечено в предыдущем параграфе, константы интегрирования являются тем звеном, через которое информация о свойствах звезды, а в том числе и релятивистских поправках, может отражаться на электромагнитных полях как в ближней, так и в волновой зонах. Одним из возможных используемых граничных условий является условие непрерывности радиальной компоненты магнитного поля на поверхности звезды, но оно требует знания значений компонент магнитного поля на поверхности звезды, которые не всегда легко измерить. С другой стороны, коэффициенты могут быть найдены путем умножения обеих сторон выражения (E.5) на  $Y_{\ell'm'}^*$  с использованием свойства ортогональности сферических гармоник  $\int d\Omega Y_{\ell m} Y_{\ell' m'}^* = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$ . Прделав данную операцию, можно получить следующие выражения для коэффициентов:

$$s_{1m} = \frac{M^3 r^2}{r^2 \ln N^2 + 2M(r + M)} \int B^{\hat{r}} Y_{1m}^* d\Omega, \quad (\text{E.8})$$

которые справедливы для любого значения радиальной координаты  $r$  и, в том числе, в асимптотически плоской области пространства-времени, где  $M/r \ll 1$ , а компоненты магнитного поля принимают свои ньютоновские значения

$$\begin{aligned} (B^{\hat{i}})_{\text{Newt.}} = \frac{B_0 R^3}{2r^3} & \left\{ 2(\cos \chi \cos \theta + \sin \chi \sin \theta \cos \phi), \right. \\ & \left. \cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta \cos \phi, \sin \chi \sin \phi \right\}, \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

где  $B_0 \equiv 2\mu/R^3$  – (ньютоновское) значение магнитного поля на оси диполя. С использованием данного свойства интегралы в правой части выражения (E.8) могут быть взяты аналитически, давая в результате

$$s_{10} = -\frac{\sqrt{3\pi}}{4} B_0 R^3 \cos \chi, \quad s_{11} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{B_0 R^3}{2} \sin \chi. \quad (\text{E.10})$$

В пределе плоского пространства-времени, т.е. для  $M/r \rightarrow 0$  и  $M/R \rightarrow 0$ , выражения (E.5)–(E.7) дают

$$\lim_{M/r \rightarrow 0, M/R \rightarrow 0} B^{\hat{r}} = -\frac{8}{3r^3} s_{1m} Y_{1m} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 B_R^{\hat{r}}, \quad (\text{E.11})$$

$$\lim_{M/r \rightarrow 0, M/R \rightarrow 0} B^{\hat{\theta}} = \frac{4}{3r^3} s_{1m} \partial_{\theta} Y_{1m} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \partial_{\theta} B_R^{\hat{r}}, \quad (\text{E.12})$$

$$\lim_{M/r \rightarrow 0, M/R \rightarrow 0} B^{\hat{\phi}} = \frac{4}{3r^3 \sin \theta} s_{1m} \partial_{\phi} Y_{1m} = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \frac{1}{\sin \theta} \partial_{\phi} B_R^{\hat{r}}. \quad (\text{E.13})$$

где  $B_R^{\hat{r}} = B_0(\cos \chi \cos \theta + \sin \chi \sin \theta \cos \phi)$  – радиальная компонента магнитного поля на поверхности звезды. Как и следовало ожидать, выражения (E.11)–(E.13) совпадают с решениями, полученными в работе [16] для дипольного магнитного поля в волновой зоне намагниченной звезды в рамках ньютоновского формализма (см. уравнения (18) в [16]), а также совпадает вывод о том, что тороидальное магнитное поле может генерироваться полоидальным, когда оно не осесимметрично (см. уравнения (E.7) и (E.13)).

## Электромагнитные поля в ближней поле вращающегося магнитного диполя

Принимая за основу фоновое дипольное магнитное поле, описанное в предыдущем параграфе, рассмотрим электромагнитные поля, генерируемые в случае, когда магнитный диполь наклонен на угол  $\chi$  по отношению к оси вращения звезды, а звезда равномерно вращается с угловой скоростью  $\Omega$ , измеряемой удаленным наблюдателем. В этом случае константы интегрирования  $s_{\ell m}$  для фонового магнитного поля остаются такими же и задаются выражением (E.10), тогда как значения констант интегрирования  $\delta s_{\ell m}$ , относящихся к возмущенному магнитному полю, равны (детали вычисления приведены в работе [50])

$$\delta s_{10} = 0, \quad \delta s_{11} = \sqrt{\frac{3\pi}{2}} \frac{B_0 R^3}{2} (e^{-i\Omega t} - 1) \sin \chi, \quad (\text{E.14})$$

где снова выбрано условие  $\delta s_{1m} = 0$  для  $m < 0$ . Подставляя (E.10) и (E.14) в (1.69)–(1.71), можно получить окончательные выражения для компонент

магнитного поля в ближней зоне вращающегося релятивистского магнитного диполя в следующей форме

$$B^{\hat{r}} = -\frac{3R^3}{8M^3} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] B_0 (\cos \chi \cos \theta + \sin \chi \sin \theta \cos \lambda), \quad (\text{E.15})$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{3R^3 N}{8M^2 r} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] B_0 (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta \cos \lambda), \quad (\text{E.16})$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{3R^3 N}{8M^2 r} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] B_0 (\sin \chi \sin \lambda), \quad (\text{E.17})$$

где  $\lambda \equiv \phi - \Omega t$ . Несмотря на то, что выражения (E.15)–(E.17) были получены новым путем, они совпадают с полученными ранее компонентами магнитного поля намагниченной релятивистской звезды в приближении медленного вращения (см. уравнения (97)–(99) в работе [34]). Более того, в случае когда  $\chi = 0$ , выражения (E.15)–(E.17) сводятся к компонентам магнитного поля релятивистского диполя, полученным в работе [29].

Рассмотрим далее выражения для электрического поля, используя уравнения (1.80)), принимая значение  $\ell = 2$  для квадрупольного электрического поля, а также используя связь между функциями  $X_{\ell m}$  и  $S_{\ell m}$  (см. уравнение (1.79)), которая оставляет в этом случае только одну ненулевую компоненту

$$X_{1m} = \frac{r^2}{2} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] \delta x_{1m}(t). \quad (\text{E.18})$$

Путем прямых выкладок можно получить в конечном счете компоненты электрического поля, генерируемые в ближней зоне вращающегося магнитного поля в виде

$$\begin{aligned} \delta E^{\hat{r}} &= \frac{1}{3} \frac{E_0}{g_R} \left[ \left( 3 - \frac{2r}{M} \right) \ln N^2 + \frac{2M^2}{3r^2} + \frac{2M}{r} - 4 \right] \times \\ &\quad \times [\cos \chi (3 \cos^2 \theta - 1) + 3 \sin \chi \sin \theta \cos \theta \cos \lambda], \end{aligned} \quad (\text{E.19})$$

$$\begin{aligned} \delta E^{\hat{\theta}} &= -\frac{1}{2} \frac{E_0}{g_R} N \left[ \left( 1 - \frac{r}{M} \right) \ln N^2 - 2 - \frac{2M^2}{3r^2 N^2} \right] \times \\ &\quad \times [2 \cos \chi \sin \theta \cos \theta - (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \sin \chi \cos \lambda], \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

$$\delta E^{\hat{\phi}} = -\frac{1}{2} \frac{E_0}{g_R} N \left[ \left( 1 - \frac{r}{M} \right) \ln N^2 - 2 - \frac{2M^2}{3r^2 N^2} \right] \sin \chi \cos \theta \sin \lambda. \quad (\text{E.21})$$

где по аналогии с соответствующими ньютоновскими выражениями, введено

электрическое поле  $E_0$ , равное

$$E_0 \equiv (f_R B_0) \frac{\Omega_R}{N_R} R = (f_R B_0) \Omega R , \quad (\text{E.22})$$

а  $f_R, g_R$  – сокращенные обозначения для

$$f_R \equiv -\frac{3}{8} \left( \frac{R}{M} \right)^3 \left[ \ln N_R^2 + \frac{2M}{R} \left( 1 + \frac{M}{R} \right) \right] , \quad (\text{E.23})$$

$$g_R \equiv \left( 1 - \frac{R}{M} \right) \ln N_R^2 - \frac{2M^2}{3R^2 N_R^2} - 2 . \quad (\text{E.24})$$

Следует отметить, что коэффициент  $f_R$ , входящий в выражение (E.21), имеет важное физическое значение, так как с помощью него можно получить простую оценку величины релятивистских поправок, приводящих к усилению магнитного поля у поверхности звезды. В частности, если мы обозначим за  $\tilde{B}_0$  радиальную компоненту магнитного поля, измеряемую на поверхности релятивистской звезды, у которой ось магнитного диполя совпадает с осью вращения, т.е.  $\tilde{B}_0 \equiv B^{\hat{r}} (r = R, \theta = 0, \chi = 0, \Omega = 0)$ , тогда отношение

$$\frac{\tilde{B}_0}{B_0} = \frac{\tilde{B}_0 R^3}{2\mu} = f_R , \quad (\text{E.25})$$

представляет собой релятивистский фактор усиления магнитного поля (см. выражение (E.15)). Этот фактор  $f_R$  является прямым следствием искривленного пространства-времени звезды и показан на вставке рисунка E.1, где он принимает значения между 1.1 и 1.5 для типичных значений компактности  $M/R$  релятивистской звезды. С помощью простых алгебраических вычислений несложно показать, что в ньютоновском пределе  $f_R = 1$  (см. уравнение (93) в работе [34]), так что  $E_0 = \Omega R B_0$  в этом случае представляет собой известное выражение для электрического поля, генерируемого вращением немагнитной ньютоновской звезды.

Также можно показать, что выражения (E.19)–(E.21) для электрического поля совпадают с решениями, найденными ранее для внешнего электрического поля вращающегося диполя с ненулевым углом между магнитной осью и осью вращения в пространстве-времени Шварцшильда (см. уравнения (124)–(126) в [34]). Более того, в предельном случае плоского пространства-времени,

т.е. при  $M/r, M/R \rightarrow 0$ , выражения совпадают с решениями для ближней зоны, полученными в работе [58]. В целом, результаты данного параграфа свидетельствуют о согласованности процедуры, используемой ранее для нахождения общего вида компонент электромагнитного поля и демонстрируют гибкость изложенного здесь формализма.

## Электромагнитные поля в волновой зоне вращающегося магнитного диполя

Выражения для электромагнитного поля, генерируемого в волновой зоне вращающегося магнитного диполя, были получены в рамках ньютоновского формализма очень давно, в работе [58], где они были представлены в сложном, но полном виде мультипольного разложения. Продолжение результатов работы [58] на случай ОТО с использованием процедуры, описанной в параграфе 1.5, является несложной задачей, но здесь она будет рассмотрена только для мультипольных членов низших порядков. В частности, в данном параграфе будут рассмотрены дипольная (для которой  $\ell = 1$ ) и квадрупольная (для которой  $\ell = 2$ ) части электрического и магнитного полей в волновой зоне, так как эти части медленнее всего падают с расстоянием от звезды и, следовательно, более всего ответственны за энергетические потери звезды.

После достаточно длинных, но тем не менее несложных выкладок, в процессе которых условия (1.107) и (1.108) записываются в явном виде с использованием компонент магнитного поля (E.15)–(E.17) и поля скоростей (E.1), можно получить константы интегрирования  $u_{\ell m}$  и  $v_{\ell m}$ , которые в дальнейшем подставляются в выражения (1.99)–(1.104). Более конкретно, в случае  $\ell = 1$  можно видеть, что  $v_{1m} = 0$ , и единственным ненулевым коэффициентом является  $u_{11}$ , задаваемый явным выражением

$$u_{11} = -\sqrt{\frac{2\pi}{3}} f_R B_0 R^3 \sin \chi \frac{1}{R_1(\Omega_R R)}. \quad (\text{E.26})$$

Используя данный результат, можно получить дипольные компоненты электромагнитных полей (1.99)–(1.104), генерируемые в волновой зоне вращаю-

щимся диполем, как вещественные части следующих решений:

$$B^{\hat{r}} = -\frac{N_R R^2}{\Omega_R R_1 (\Omega_R R)} f_R B_0 \sin \chi \sin \theta e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} , \quad (\text{E.27})$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{i}{2r} \frac{N_R^2 R^2}{R_1 (\Omega_R R)} f_R B_0 \sin \chi \cos \theta e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} , \quad (\text{E.28})$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{1}{2r} \frac{N_R^2 R^2}{R_1 (\Omega_R R)} f_R B_0 \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} , \quad (\text{E.29})$$

$$E^{\hat{r}} = 0 , \quad (\text{E.30})$$

$$E^{\hat{\theta}} = \frac{1}{2r} \frac{N_R^3 R}{\Omega_R R_1 (\Omega_R R)} E_0 \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} = c B^{\hat{\phi}} , \quad (\text{E.31})$$

$$E^{\hat{\phi}} = -\frac{i}{2r} \frac{N_R^3 R}{\Omega_R R_1 (\Omega_R R)} E_0 \sin \chi \cos \theta e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} = -c B^{\hat{\theta}} . \quad (\text{E.32})$$

Так как волновая зона расположена далеко за пределами светового цилиндра, т.е. на расстояниях  $r \gg r_{lc} \equiv c/\Omega$ , выражения (E.27)–(E.32) показывают, что в этой области электромагнитные поля ведут себя как типичные радиально расходящиеся волны, для которых  $|B^{\hat{r}}/B^{\hat{\theta}}| \sim |B^{\hat{r}}/B^{\hat{\phi}}| \sim c/\Omega r \ll 1$ .

Проводя такие же рассуждения для случая  $\ell = 2$ , а также требуя регулярность решений при  $\theta = 0$ , можно показать, что  $u_{2m} = 0$  и единственным ненулевым коэффициентом является  $v_{21}$ , явный вид которого

$$v_{21} = \frac{i}{3} \sqrt{\frac{\pi}{5}} (\Omega_R R)^5 f_R B_0 \sin \chi . \quad (\text{E.33})$$

В результате, квадрупольные компоненты электромагнитного поля, генерируемые в волновой зоне вращающимся магнитным диполем, равны вещественным частям следующих решений:

$$B^{\hat{r}} = 0 , \quad (\text{E.34})$$

$$B^{\hat{\theta}} = \frac{1}{12} \frac{\Omega_R^4 R^5}{N_R r} f_R B_0 \cos \theta \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} , \quad (\text{E.35})$$

$$B^{\hat{\phi}} = \frac{i}{12} \frac{\Omega_R^4 R^5}{N_R r} f_R B_0 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} , \quad (\text{E.36})$$

$$E^{\hat{r}} = -\frac{1}{2} \frac{\Omega_R^2 R^4}{N_R r^2} E_0 \sin \theta \cos \theta \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} , \quad (\text{E.37})$$

$$E^{\hat{\theta}} = -\frac{i}{12} \frac{\Omega_R^3 R^4}{r} E_0 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} = -c B^{\hat{\phi}} , \quad (\text{E.38})$$

$$E^{\hat{\phi}} = \frac{1}{12} \frac{\Omega_R^3 R^4}{r} E_0 \cos \theta \sin \chi e^{i[\Omega(r-t)+\phi]} = c B^{\hat{\theta}} . \quad (\text{E.39})$$

В данном случае электромагнитные поля также ведут себя как типичные радиально расходящиеся волны, для которых  $|E^{\hat{r}}/E^{\hat{\theta}}| \sim |E^{\hat{r}}/E^{\hat{\phi}}| \sim c/\Omega r \ll 1$ .

Следует отметить несколько особенностей полученных выражений (E.27)–(E.39). Первым и очевидным является то, что все эти компоненты тождественно равны нулю, когда ось магнитного диполя совпадает с осью вращения (т.е.  $\chi = 0$ ), подчеркивая тот факт, что осесимметричная конфигурация не может генерировать электромагнитные волны. Вторым является то, что все компоненты имеют фазовый член  $\propto \exp\{i[\Omega(r-t) + \phi]\}$ , выражающий волновую природу решений, тогда как член  $\propto \exp(i\Omega r)$  появляется в решениях из сферических функций Ганкеля, в случае когда  $\omega = \Omega$ . В пределе плоского пространства-времени данные решения совпадают с выражениями (87) и (88) в работе [57] для дипольных и квадрупольных полей соответственно. Наконец, так как выражения (E.27)–(E.32) и (E.34)–(E.39) представляют собой основной вклад в электромагнитное поле волновой зоны, они вносят наибольший вклад также и в электромагнитные потери энергии, которые будут вычислены в следующем параграфе.

### **Потери энергии вращающегося магнитного диполя на электромагнитное излучение**

Используя результаты предыдущего параграфа, можно вычислить мощность, уносимую дипольным электромагнитным излучением,  $L_{em}$ , как интеграл радиальной компоненты вектора Пойнтинга  $\vec{P}$ ,

$$L_{em} \equiv \int_{\partial\Sigma} P^{\hat{r}} dS = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial\Sigma} \left( \vec{E} \times \vec{B} \right)^{\hat{r}} dS, \quad (\text{E.40})$$

где интегрирование берется по поверхности сферы  $\partial\Sigma$  с радиусом  $r \gg c/\Omega > R$  и элементом площади  $dS$ .

Подставляя в (E.40) выражения (1.100)–(1.101) и (1.103)–(1.104) для электрического и магнитного полей в волновой зоне, несложно показать, что ра-

диальная компонента вектора Пойнтинга равна

$$P^{\hat{r}} = \frac{1}{4\pi} \left| E^{\hat{\phi}} B^{\hat{\theta}} - E^{\hat{\theta}} B^{\hat{\phi}} \right| = \frac{1}{4\pi\ell(\ell+1)} \left| \omega D H_{\ell}(\omega r) H_{\ell}(\omega r) \right. \\ \left. \times \left[ |u_{\ell m}|^2 + |v_{\ell m}|^2 \right] \left( \partial_{\theta} Y_{\ell m} \partial_{\theta} Y_{\ell m}^* + \frac{m Y_{\ell m} m Y_{\ell m}^*}{\sin \theta \sin \theta} \right) \right|, \quad (\text{E.41})$$

и существенным образом зависит от квадратов констант интегрирования  $u_{\ell m}$  и  $v_{\ell m}$  (см. уравнения (1.107) и (1.108)). В случае чисто дипольного излучения  $u_{11}$  является единственным ненулевым коэффициентом (см. уравнение (E.26)) и мощность (E.40), испускаемая в виде дипольного электромагнитного излучения, равна

$$L_{em} = \frac{N_R^4 R^4 \tilde{B}_0^2}{6R_1^2 (\Omega_R R) c^3} \sin^2 \chi. \quad (\text{E.42})$$

Сравнивая полученное выражение с ньютоновским выражением для скорости потерь энергии на дипольное электромагнитное излучение ([68],[40])

$$(L_{em})_{\text{Newt.}} = \frac{\Omega^4 R^6 B_0^2}{6c^3} \sin^2 \chi, \quad (\text{E.43})$$

можно легко видеть, что релятивистские поправки, возникающие в выражении (E.42) частично объясняются усилением магнитного поля на поверхности звезды (т.е.  $\tilde{B}_0 = f_R B_0$ ; см. уравнение E.25)), а частично увеличением эффективной угловой скорости вращения за счет гравитационного красного смещения (т.е.  $\Omega = \Omega_R N_R$ ; см. уравнение (1.89)). В целом, следовательно, искривленное пространство-время увеличивает потери энергии посредством дипольного электромагнитного излучения на фактор, который равен

$$\frac{L_{em}}{(L_{em})_{\text{Newt.}}} = \left( \frac{f_R}{N_R} \right)^2, \quad (\text{E.44})$$

и изображен на рисунке E.1 сплошной линией. Несмотря на то, что при получении выражения (E.42) влиянием кривизны пространства-времени на электромагнитные поля в волновой зоне пренебрегалось, из полученного результата видно, что даже при такой упрощенной постановке задачи ньютоновское выражение недооценивает дипольные электромагнитные потери энергии на фактор, значение которого лежит в пределах между 2 и 6 для типичных значений компактности релятивистских звезд. Для типичной НЗ с магнитным

полем  $B_0 = 10^{12}$  Гс, радиусом  $R = 12$  км и угловой скоростью  $\Omega = 500$  рад/сек выражение (E.42) дает для темпа потерь энергии

$$L_{em} \approx 1.1 \times 10^{39} \left( \frac{f_R^2}{N_R^4} \right) \left( \frac{R}{1.2 \times 10^6 \text{ cm}} \right)^6 \left( \frac{\Omega}{500 \text{ rad}^{-1}} \right)^4 \times \left( \frac{B_0}{10^{12} \text{ G}} \right)^2 \sin^2 \chi \text{ ergs s}^{-1}, \quad (\text{E.45})$$

где  $f_R^2/N_R^4 \simeq 4$  для  $M = 1.4M_\odot$ .

Выражение для потерь энергии (E.42) может также быть использовано для нахождения изменения периода пульсара при переходе его вращательной энергии в энергию электромагнитного излучения. Следуя простым рассуждениям, предложенным более 40 лет назад ([40], [41]), можно прямо связать электромагнитные потери энергии  $L_{em}$  с потерями вращательной кинетической энергии звезды, определяемой как

$$E_{\text{rot}} \equiv \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{x} \sqrt{\gamma} e^{-\Phi(r)} \rho (\delta v^{\hat{\phi}})^2, \quad (\text{E.46})$$

где  $\rho$  – плотность энергии звезды. Вводя общерелятивистский момент инерции звезды

$$\tilde{I} \equiv \int d^3\mathbf{x} \sqrt{\gamma} e^{-\Phi(r)} \rho r^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{E.47})$$

который в ньютоновском пределе дает известное выражение для момента инерции сферически распределенного вещества  $I \equiv (\tilde{I})_{\text{Newt.}} = \frac{2}{5} M R^2$ , уравнение преобразования энергии можно записать в виде

$$\dot{E}_{\text{rot}} \equiv \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \tilde{I} \Omega^2 \right) = -L_{em}. \quad (\text{E.48})$$

При написании выражения (E.48) мы, очевидно, считали, что все остальные механизмы потери энергии звезды (к примеру, потери за счет гравитационного излучения) являются пренебрежимо малыми. Это приближение является достаточно обоснованным за исключением начальных стадий жизни пульсара, во время которых потери энергии на гравитационное излучение будут доминировать за счет более крутой зависимости от угловой скорости вращения ( $\dot{E}_{\text{GW}} \propto \Omega^6$ ).

Выражение (E.48) может также быть переписано в более удобной форме через наиболее важные наблюдательные характеристики пульсара: период  $P$

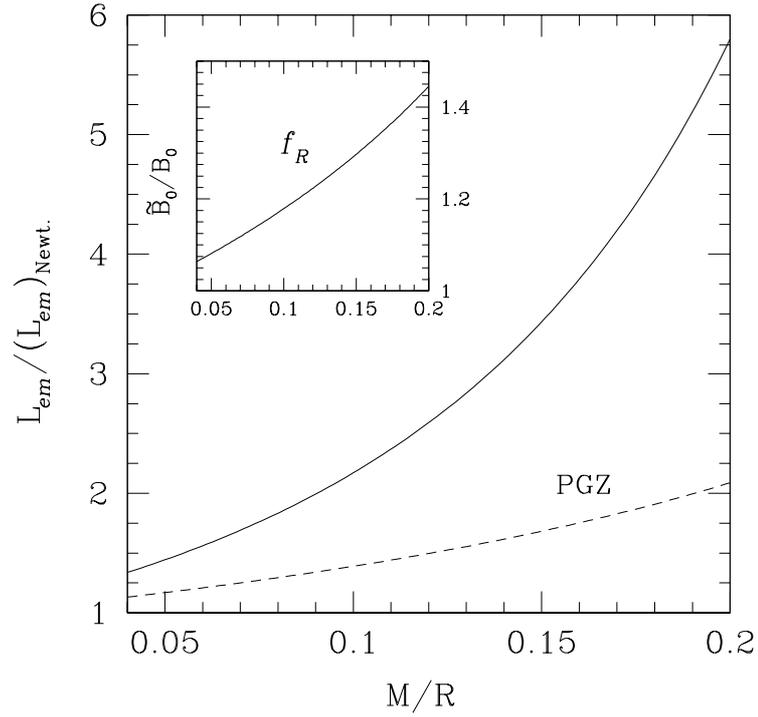


Рис. Е.1: Общерелятивистское усиление потерь энергии за счет дипольного электромагнитного излучения как функция компактности звезды. Сплошная линия представляет результат, полученный здесь [см. ур-я (Е.42) и (Е.43)], а пунктирная линия представляет феноменологическую оценку, сделанную в [66] (PGZ). На вставке показано усиление магнитного поля, производимое искривлением пространства-времени для различных значений компактности звезды [см. ур-е (Е.25)].

и его производную по времени  $\dot{P} \equiv dP/dt$ . В этом случае, используя выражения (E.42) и (E.48), легко показать, что

$$P\dot{P} = \left(\frac{2\pi^2}{3c^3}\right) \frac{1}{N_R^4} \frac{R^6 \tilde{B}_0^2}{\tilde{I}} = \left(\frac{f_R^2 I}{N_R^4 \tilde{I}}\right) (P\dot{P})_{\text{Newt.}}, \quad (\text{E.49})$$

где соответствующее ньютоновское выражение задано формулой ([41])

$$(P\dot{P})_{\text{Newt.}} \equiv \left(\frac{2\pi^2}{3c^3}\right) \frac{R^6 B_0^2}{I}. \quad (\text{E.50})$$

Здесь также можно видеть, что релятивистские поправки обусловлены усилением магнитного поля звезды, а также увеличением угловой скорости вращения, входящей в выражение для момента инерции звезды (E.49).

Выражения (E.42) и (E.49) могут быть использованы для исследования временной эволюции периода намагниченной НЗ с первично дипольным магнитным полем, вмороженным в кору, как для случая изолированной звезды, так и для звезды в двойной системе. Аккуратное подробное исследование первого случая было проведено авторами работы [66], которые обратили особое внимание на релятивистские поправки, необходимые для корректного моделирования термальной эволюции звезды, а также эволюции ее магнитного поля и периода. Однако, следует заметить, что в своей работе авторы [66] получили выражение для потерь вращательной кинетической энергии звезды, похожее на выражение (E.49), которое включает в себя усиление магнитного поля за счет кривизны пространства-времени, но не включает поправки, связанной с гравитационным красным смещением. В результате релятивистское выражение для потерь энергии, полученное в работе [66], дает меньшие значения, чем полученное в данной главе, и для сравнения показано пунктирной линией на рисунке E.1 (обозначено как PGZ). Как указали сами авторы работы, их выбор основывался на простых феноменологических соображениях и был сделан без систематического рассмотрения электромагнитных полей, генерируемых намагниченной релятивистской звездой. Таким образом, можно рассчитывать, что результат, полученный в данной главе, будет в дальнейшем использован при рассмотрении термальной, магнитной и вращательной эволюции намагниченных НЗ.

## Ф. Электромагнитные поля для различных мод осцилляций

Возмущенное магнитное поле в ближней зоне для моды осцилляций  $\ell' = 1, m' = 0$

$$\delta B^r = -i\sqrt{\frac{3\pi}{4}} \frac{9R^2}{128M^3 f_R \omega_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] B_0 (h_R \eta_R + f_R \xi_R) e^{-i\omega_R t} \left( 3 \sin \chi \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \chi \sin \theta e^{i\phi} \right), \quad (\text{F.1})$$

$$\delta B^\theta = i\sqrt{\frac{3\pi}{4}} \frac{9R^2 N}{128M^2 r f_R \omega_R} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] B_0 (h_R \eta_R + f_R \xi_R) e^{-i\omega_R t} \left( 3 \sin \chi \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \chi \cos \theta e^{i\phi} \right), \quad (\text{F.2})$$

$$\delta B^\phi = \sqrt{\frac{3\pi}{4}} \frac{9R^2 N}{128M^2 f_R \omega_R r \sin \theta} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] B_0 (h_R \eta_R + f_R \xi_R) e^{-i\omega_R t} \cos \chi \sin \theta e^{i\phi}. \quad (\text{F.3})$$

Компоненты возмущенного магнитного поля при радиальной осцилляции

$$\delta B^r = -i \frac{3R^2 h_R}{4M^2 f_R \omega_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} (\cos \theta \cos \chi + \sin \theta \sin \chi \cos \phi), \quad (\text{F.4})$$

$$\delta B^\theta = i \frac{3R^2 N h_R}{4M r f_R \omega_R} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} (\sin \theta \cos \chi - \cos \theta \sin \chi \cos \phi), \quad (\text{F.5})$$

$$\delta B^\phi = i \frac{3R^2 N h_R}{4M r f_R \omega_R} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} \sin \chi \sin \phi. \quad (\text{F.6})$$

Компоненты электрического поля при радиальной осцилляции

$$\delta E^r = 0, \quad (\text{F.7})$$

$$\delta E^\theta = -\frac{3rR^2}{8M^3 N_R f_R} \frac{h_R}{f_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] \times B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} \sin \chi \sin \phi, \quad (\text{F.8})$$

$$\delta E^\phi = \frac{3rR^2}{8M^3 N_R f_R} \frac{h_R}{f_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] \times B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} (\sin \theta \cos \chi - \sin \chi \cos \theta \cos \phi), \quad (\text{F.9})$$

где  $\omega_R \equiv \omega(r = R)$  – угловая частота осцилляций, измеренная наблюдателем на поверхности звезды.

Компоненты возмущенного магнитного поля, генерируемого тороидальными осцилляциями с  $\ell' = m' = 1$ , при ненулевом угле между начальным магнитном полем звезды и осью тороидального вращения:

$$\delta B^r = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{3R^2}{8M^3\omega_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] \times B_0 \eta_R e^{-i(\omega_R t - \phi)} \cos \chi \sin \theta , \quad (\text{F.10})$$

$$\delta B^\theta = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{3NR^2}{8M^2 r \omega_R} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] \times B_0 \eta_R e^{-i(\omega_R t - \phi)} \cos \chi \cos \theta , \quad (\text{F.11})$$

$$\delta B^\phi = -i \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{3NR^2}{8M^2 \omega_R r \sin \theta} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] \times B_0 \eta_R e^{-i(\omega_R t - \phi)} \cos \chi \sin \theta , \quad (\text{F.12})$$

где неисчезающая константа интегрирования

$$\delta s_{11}(t) = \frac{3R^2}{8\omega_R} B_0 \eta_R \cos \chi e^{-i(\omega_R t - \phi)} . \quad (\text{F.13})$$

Компоненты электрического поля во внешней области намагниченной звезды, наклоненной по отношению к оси моды (т.е. тороидальная мода имеет произвольную ориентацию), для мод осцилляций с  $\ell' = 1, m' = 0$  :

$$\delta E^r = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left\{ \frac{1}{3g_R N_R} \left[ \left( 3 - \frac{2r}{M} \right) \ln N^2 + \frac{2M^2}{3r^2} + \frac{2M}{r} - 4 \right] \times \right. \\ \times (3 \cos^2 \theta - 1) \cos \chi + \frac{27}{256} \frac{R^3}{M^3 h_R} \left[ \ln N^2 + \frac{2M}{r} \left( 1 + \frac{M}{r} \right) \right] \times \\ \left. \cos \theta \sin \chi \right\} \frac{f_R}{N_R} B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} , \quad (\text{F.14})$$

$$\delta E^\theta = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \left\{ \frac{N}{g_R N_R} \left[ \left( 1 - \frac{r}{M} \right) \ln N^2 - 2 - \frac{2M^2}{3r^2 N^2} \right] (\cos \chi \sin \theta \cos \theta) + \right. \\ \left. + \frac{27}{256} \frac{R^3 N}{M^2 h_R r} \left[ \frac{r}{M} \ln N^2 + \frac{1}{N^2} + 1 \right] \sin \theta \sin \chi \right\} \frac{f_R}{N_R} B_0 \eta_R e^{-i\omega_R t} \quad (\text{F.15})$$

$$\delta E^\phi = 0 , \quad (\text{F.16})$$

где  $g_R$  – постоянный коэффициент (E.24).

Электромагнитные поля (1.99)–(1.104), индуцируемые в волновой зоне осцилляционной модой  $\ell' = 1, m' = 0$ :

$$B^r = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{R^2}{N_R r^2} B_0 \left\{ \frac{\omega_R R}{N_R} (\eta_R h_R + \xi_R f_R) (3 \cos^2 \theta - 1) \cos \chi + \right. \\ \left. + i \frac{9}{8} (\eta_R h_R - 3 \xi_R f_R) \sin \chi \cos \theta \right\} e^{i\omega(r-t)}, \quad (\text{F.17})$$

$$B^\theta = \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{\omega_R R^2}{N_R r} B_0 \left\{ \omega_R R (\eta_R h_R + \xi_R f_R) \sin \theta \cos \theta \cos \chi + \right. \\ \left. + \frac{9}{16} (\eta_R h_R - 3 \xi_R f_R) \sin \chi \sin \theta \right\} e^{i\omega(r-t)}, \quad (\text{F.18})$$

$$B^\phi = \frac{15}{32} \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 \eta_R h_R \sin \chi \sin \theta \cos \theta e^{i\omega(r-t)}, \quad (\text{F.19})$$

$$E^r = i \frac{15}{32} \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 \eta_R h_R \sin \chi (3 \cos^2 \theta - 1) e^{i\omega(r-t)}, \quad (\text{F.20})$$

$$E^\theta = \frac{15}{32} \frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 \eta_R h_R \sin \chi \sin \theta \cos \theta e^{i\omega(r-t)}, \quad (\text{F.21})$$

$$E^\phi = -\frac{1}{\sqrt{12\pi}} \frac{\omega_R R^2}{N_R r} B_0 \left\{ \omega_R R (\eta_R h_R + \xi_R f_R) \sin \theta \cos \theta \cos \chi + \right. \\ \left. + \frac{9}{16} (\eta_R h_R - 3 \xi_R f_R) \sin \chi \sin \theta \right\} e^{i\omega(r-t)}. \quad (\text{F.22})$$

Мультипольные электромагнитные поля, индуцируемые в волновой зоне

осцилляционной модой  $\ell' = 2, m' = 2$ :

$$B^r = \frac{1}{2\sqrt{30\pi}} \frac{\omega_R^2 R^4}{N_R^2 r^2} B_0 (2\eta_R h_R - 3\xi_R f_R) \sin^2 \theta \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]} , \quad (\text{F.23})$$

$$B^\theta = \frac{i}{48} \frac{1}{\sqrt{30\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 [22\eta_R h_R - 3\xi_R f_R + 3(2\eta_R h_R - 3\xi_R f_R) \cos 2\theta] \times \\ \times \sin \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]} , \quad (\text{F.24})$$

$$B^\phi = -\frac{1}{24\sqrt{30\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 (7\eta_R h_R - 3\xi_R f_R) \sin \theta \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]} (\text{F.25})$$

$$E^r = \frac{i}{4} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{\omega_R^2 R^4}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R h_R \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]} , \quad (\text{F.26})$$

$$E^\theta = -\frac{1}{24\sqrt{30\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 (7\eta_R h_R - 3\xi_R f_R) \sin \theta \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]} (\text{F.27})$$

$$E^\phi = \frac{i}{48} \frac{1}{\sqrt{30\pi}} \frac{\omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 [22\eta_R h_R - 3\xi_R f_R + 3(2\eta_R h_R - 3\xi_R f_R) \cos 2\theta] \times \\ \times \sin \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]} . \quad (\text{F.28})$$

Решение (1.99)–(1.104) для дипольного случая ( $l = 1$ ) в волновой зоне ( $\omega r \rightarrow \infty$ ) для радиальных осцилляций (2.22):

$$B^r = \frac{2h_R R^2}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} (\cos \chi \cos \theta + \sin \chi \sin \theta e^{i\phi}) , \quad (\text{F.29})$$

$$B^\theta = -i \frac{h_R \omega_R R^2}{N_R r} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta e^{i\phi}) , \quad (\text{F.30})$$

$$B^\phi = -\frac{h_R \omega_R R^2}{N_R r} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} \sin \chi e^{i\phi} , \quad (\text{F.31})$$

$$E^r = 0 , \quad (\text{F.32})$$

$$E^\theta = -\frac{h_R \omega_R R^2}{N_R r} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} \sin \chi e^{i\phi} , \quad (\text{F.33})$$

$$E^\phi = i \frac{h_R \omega_R R^2}{N_R r} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} (\cos \chi \sin \theta - \sin \chi \cos \theta \cos \phi) , \quad (\text{F.34})$$

существование которого обусловлено наличием не исчезающей константы

$$u_{10} = -2\sqrt{\frac{2\pi}{3}} \frac{h_R R^2}{N_R} B_0 \eta_R \cos \chi, \quad u_{11} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \frac{\omega_R h_R R^2}{N_R} B_0 \eta_R \sin \chi, \quad (\text{F.35})$$

Электромагнитные поля, испускаемые осцилляционной модой  $\ell' = 1, m' = 0$ :

$$B^\phi = \frac{i}{4\sqrt{3\pi}} \frac{f_R \omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} \sin \theta \cos \theta \cos \chi, \quad (\text{F.36})$$

$$E^r = -\frac{1}{4\sqrt{3\pi}} \frac{f_R \omega_R^2 R^4}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} (3 \cos^2 \theta - 1) \cos \chi, \quad (\text{F.37})$$

$$E^\theta = \frac{i}{4\sqrt{3\pi}} \frac{f_R \omega_R^3 R^4}{N_R r} B_0 \eta_R e^{i\omega(r-t)} \sin \theta \cos \theta \cos \chi, \quad (\text{F.38})$$

где не исчезающие константы интегрирования

$$v_{20} = -\frac{i}{15} \sqrt{\frac{5}{2}} \frac{f_R \omega_R^3 R^4}{N_R} B_0 \eta_R \cos \chi. \quad (\text{F.39})$$

Выражения для электромагнитных полей, излучаемых модой  $\ell' = 1, m' = 1$ :

$$B^r = \frac{3i}{2\sqrt{6\pi}} \frac{f_R R^2}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R \sin \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+\phi]}, \quad (\text{F.40})$$

$$B^\theta = -\frac{3}{4\sqrt{6\pi}} \frac{f_R \omega_R R^2}{N_R r} \left(1 + \frac{i}{9} \omega_R^2 R^2\right) B_0 \eta_R \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+\phi]}, \quad (\text{F.41})$$

$$B^\phi = -\frac{3i}{4\sqrt{6\pi}} \frac{f_R \omega_R R^2}{N_R r} \left(1 + \frac{i}{9} \omega_R^2 R^2 \cos 2\theta\right) B_0 \eta_R \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+\phi]}, \quad (\text{F.42})$$

$$E^r = -\frac{i}{2\sqrt{6\pi}} \frac{f_R \omega_R^2 R^4}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R \sin \theta \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+\phi]}, \quad (\text{F.43})$$

$$E^\theta = -\frac{3i}{4\sqrt{6\pi}} \frac{f_R \omega_R R^2}{N_R r} \left(1 + \frac{i}{9} \omega_R^2 R^2 \cos 2\theta\right) B_0 \eta_R \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+\phi]}, \quad (\text{F.44})$$

$$E^\phi = \frac{3}{4\sqrt{6\pi}} \frac{f_R \omega_R R^2}{N_R r} \left(1 + \frac{i}{9} \omega_R^2 R^2\right) B_0 \eta_R \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+\phi]}, \quad (\text{F.45})$$

выраженные через не исчезающие константы интегрирования

$$v_{21} = \frac{i}{3\sqrt{30}} \frac{f_R \omega_R^3 R^4}{N_R} B_0 \eta_R \cos \chi, \quad u_{11} = \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{f_R \omega_R R^2}{N_R} B_0 \eta_R \cos \chi. \quad (\text{F.46})$$

Электромагнитные поля в волновой зоне для быстро растущих тороидальных мод с  $\ell' = m' = 2$ :

$$B^r = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{f_R \omega_R R^3}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R \cos \chi \sin^2 \theta e^{i[\omega(r-t)+2\phi]}, \quad (\text{F.47})$$

$$B^\theta = -\frac{i}{12} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{f_R \omega_R^2 R^3}{N_R r} B_0 \eta_R \left( 1 + \frac{i}{10} \omega_R^2 R^2 \right) \times \\ \times \sin \theta \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]}, \quad (\text{F.48})$$

$$B^\phi = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{f_R \omega_R^2 R^3}{N_R r} B_0 \eta_R \left( 1 + \frac{i}{40} \omega_R^2 R^2 + \frac{3i}{40} \omega_R^2 R^2 \cos 2\theta \right) \times \\ \times \sin \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]}, \quad (\text{F.49})$$

$$E^r = \frac{1}{2\sqrt{30\pi}} \frac{f_R \omega_R^3 R^5}{N_R^2 r^2} B_0 \eta_R \cos \chi \sin^2 \theta \cos \theta e^{i[\omega(r-t)+2\phi]}, \quad (\text{F.50})$$

$$E^\theta = \frac{1}{12} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{f_R \omega_R^2 R^3}{N_R r} B_0 \eta_R \left( 1 + \frac{i}{40} \omega_R^2 R^2 + \frac{3i}{40} \omega_R^2 R^2 \cos 2\theta \right) \times \\ \times \sin \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]}, \quad (\text{F.51})$$

$$E^\phi = \frac{i}{12} \sqrt{\frac{5}{6\pi}} \frac{f_R \omega_R^2 R^3}{N_R r} B_0 \eta_R \left( 1 + \frac{i}{10} \omega_R^2 R^2 \right) \times \\ \times \sin \theta \cos \theta \cos \chi e^{i[\omega(r-t)+2\phi]}. \quad (\text{F.52})$$